

سلسلة الفاروق

فى

الرياضيات

للمصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

٠١١٥٦٢٤٤٤٣١٠

إعداد : أ/عشري فاروق

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ح

الدرس الأول

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١) $x^2 + 5x + 6 = 0$

٢) $x^2 + 12x + 4 = 0$

٣) $x^2 = 2(x + 6)$

٤) $x^2 = 16$

٥) $x + \frac{5}{x} = 6$ ، $x \neq 0$

الحل

١) $\therefore x^2 + 5x + 6 = 0$

$\therefore (x + 3)(x + 2) = 0$

إما $x + 3 = 0$ أو $x + 2 = 0$

$\therefore x = -3$ أو $\therefore x = -2$

$\therefore \text{م. ح.} = \{-3, -2\}$

٢) $x^2 + 12x + 4 = 0$

$\therefore \text{الحد الأوسط} = \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الأخير}}$

 \therefore المقدار ثلاثى مربع كامل

$\therefore (x + \sqrt{\text{الحد الأول}} + \sqrt{\text{الحد الأخير}})^2 = 0$

$\therefore (x + 3 + 2)^2 = 0$

$\therefore x + 5 = 0$

$\therefore x = -5$ أو $\therefore x = -5$

$\therefore \text{م. ح.} = \{-5\}$

الصورة العامة

$ax^2 + bx + c = 0$

حيث $a \neq 0$ ، b ، c أعداد حقيقية ، $a \neq 0$

مثال

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 + 3x = 0$

$x^2 - 4 = 0$

حل المعادلة فى ح

يقصد بحل المعادلة :

$ax^2 + bx + c = 0$

إيجاد قيم المتغير x التي تحقق تساوي

طرفيها وتسمى هذه القيم جذور المعادلة

ويتم حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير

واحد فى ح بطريقتين : جبرياً وبيانياً

أولاً : الطريقة الجبرية

بإحدى طريقتين :

١ التحليل :

٢ القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore (3s - 4)(3s + 4) = 0$$

$$\text{إما : } 3s - 4 = 0 \quad \text{أو : } 3s + 4 = 0$$

$$\therefore 3s = 4 \quad \therefore 3s = -4$$

$$\therefore s = \frac{4}{3} \quad \therefore s = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \left\{ \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$$

$$\textcircled{5} \quad \therefore s + \frac{5}{s} = 4, s \neq 0$$

بالضرب $\times s$ للطرفين

$$\therefore s^2 + 5 = 4s$$

$$\therefore s^2 - 4s + 5 = 0$$

ويصعب تحليل المقدار إلى عاملين

باستخدام القانون العام :

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore 1 = a, b = -4, c = 5$$

$$\therefore s = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \emptyset$$

$$\textcircled{3} \quad \therefore s^2 = 2(s + 6)$$

$$\therefore s^2 - 2s - 12 = 0$$

$$\therefore s^2 - 2s - 12 = 0$$

يصعب تحليل المقدار : $(s^2 - 2s - 12)$

لذلك نوجد حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore 1 = a, b = -2, c = -12$$

$$\therefore s = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\therefore s = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

إما

$$\therefore s = \frac{2 + \sqrt{52}}{2} \approx 6, 4$$

أو

$$\therefore s = \frac{2 - \sqrt{52}}{2} \approx -6, 2$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \{6, 4, -6, 2\}$$

$$\textcircled{4} \quad 9s^2 = 16$$

$$\therefore 9s^2 - 16 = 0$$

مثال ٢

أوجد في مجموعة الحل للمعادلات الآتية

$$١ \quad س + ٣ = ٥$$

$$٢ \quad س + ٥ = ٢$$

$$٣ \quad س - (٣ + ١) = ٣$$

الحل

$$١ \quad س + ٣ = ٥$$

بأخذ س عامل مشترك

$$س (٣ + ١) = ٥$$

$$إما س = ٣$$

$$أو س = ٣$$

$$س = ٣$$

$$س. ح. = \{٣, ٠\}$$

$$٢ \quad س + ٥ = ٢$$

معامل س لا يساوى ١

المقدار غير بسيط

$$\begin{array}{rcl} ١ & \swarrow & ٢ \\ - & & - \\ ٢ & \searrow & ١ \end{array}$$

$$س (١ - ٢) = ٢ - ٥$$

$$إما س = ١$$

$$أو س = ٢$$

$$س = \frac{١}{٢}$$

$$س. ح. = \{٢, \frac{١}{٢}\}$$

$$٣ \quad س - (٣ + ١) = ٣$$

نوجد عددين حاصل ضربهم

$$= (٣ + ١) - ٣$$

العددان هما : ١ ، ٣

$$س (١ - ٣) = ٣ - ٤$$

$$إما س = ١$$

$$أو$$

$$س = ٣$$

$$س = ١$$

$$س. ح. = \{٣, ١\}$$

ثانياً : الطريقة البيانية

ولحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

$$M = S^2 + S + C$$

٢ فرض أن :

$$د(س) = ۱س۲ + ۲س + ۳ =$$

نوجد نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية

وہی $(\frac{p}{r}, (\frac{p}{r}))$ د

٤ نكون الجدول التالي

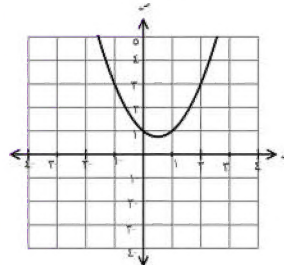
س					$\frac{y}{p}$	
د(س)					د($\frac{y}{p}$)	

٥ نمثل الدالة بيانياً

وتوجد عدة حالات

١ إذا كان منحنى الدالة التريعية

لا يقطع محور السينات

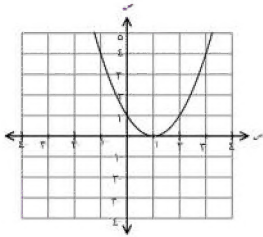


∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

فی ع ہی \emptyset

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية



يمس محور السينات

فإن نقطة التماس هي : $(\frac{5}{12}, 0)$

∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

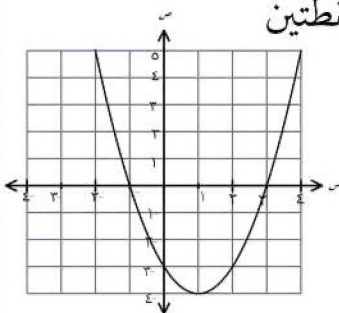
فی ع ہی $\{\frac{5}{p^2}\}$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان متساويان

وکل منها یساوی $\frac{۷}{۲}$

إذا كان منحنى الدالة التربيعية

يقطع محور السينات في النقطتين



(٠، م) ، (٠، ج)

مجموعة حل المعادلة $D(s) = 0$.

فی ح ہی { ل ، م }

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

مثال ٣

أوجد في ح مجموعة حل المعادلة

$$س^٢ - ٢س = ٣ \text{ بيانيا}$$

الحل

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

$$\therefore س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$$

٢ نفرض أن د(س) = س^٢ - ٢س - ٣

٣ نوجد الإحداثي السيني لنقطة رأس

$$\text{المنحنى : } س = \frac{-٢}{٢} = -١ = \frac{٢}{٢}$$

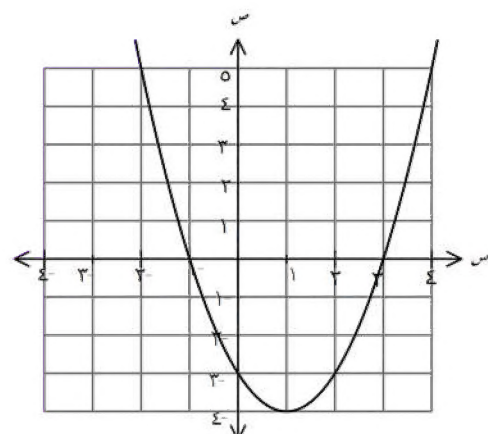
$$د(١) = (١)^٢ - ٢ \times ١ - ٣ = -٤$$

$$= -٤ = ٣ - ٢ - ١$$

٤ نكون الجدول التالي

س	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

٥ نمثل الدالة بيانياً



منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات

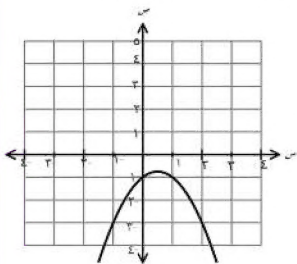
$$(-١, ٠), (٣, ٠)$$

∴ مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

$$\text{في ح هي } \{-١, ٣\}$$

ملاحظات مهمة

١ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



$$د(س) = س^٢ + س + ح$$

ويكون :

١ المنحنى مفتوح لأسفل ∴ $١ > ٠$

٢ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

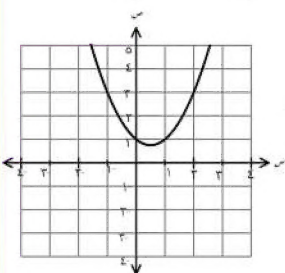
وتكون مجموعة الحل في ح هي ∅

٣ قيمة المقدار : $٤ - ٢ - ١ = ١ > ٠$

٤ المنحنى يقطع محور الصادات

$$(١, -٤) \therefore ح = -١$$

٢ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



$$د(س) = س^٢ + س + ح$$

ويكون :

١ المنحنى مفتوح لأعلى ∴ $١ < ٠$

٢ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

وتكون مجموعة الحل في ح هي ∅

مثال ٥

أوجد قيمتي : ٢ ، ٣ إذا علم أن : ٣ ، ٢ هما جذرا المعادلة :

$$٢س^٢ + ٣س + ٦ = ٠$$

الحل

$$\therefore س = ٢ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$\therefore ٢ = ٢ + ٣ + ٦ = ٠$$

بالقسمة على ٢ للطرفين

$$\therefore ٢ = ٣ + ٣ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٢ = ٣ + ٣ + ٦ = ٠ \quad \leftarrow ١$$

$$\therefore س = ٣ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$\therefore ٣ = ٣ + ٣ + ٦ = ٠$$

بالقسمة على ٣ للطرفين

$$\therefore ٣ = ٢ + ٣ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٣ = ٢ + ٣ + ٦ = ٠ \quad \leftarrow ٢$$

بطرح ١ من ٢

$$\therefore ١ = ٢$$

بالتعويض في ١

$$\therefore ٣ = ٢ + ٣ = ٠$$

$$\therefore ٥ = ٢$$

٣ قيمة المقدار : $٢ - ٤ = ٢$ ، $٣ > ٠$

٤ المنحنى يقطع محور الصادات

$$(١, ٠) \therefore ١ = ٠$$

مثال ٤

إذا كانت : $٦ = س$ أحد جذري المعادلة :

$$٢س^٢ + ٥س + ٦ = ٠$$

فأوجد قيمة : ٢ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل

$$\therefore س = ٦ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$٦ = ٢ + ٥ \times ٦ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٦ = ٢ + ٣٠ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٦ = ٦٦ + ٢ = ٠$$

$$\therefore ٦٦ = ٢$$

المعادلة هي :

$$٢س^٢ + ٥س - ٦٦ = ٠$$

$$\therefore (١١ + س)(٦ - س) = ٠$$

$$١١ + س = ٠ \text{ أو } ٦ - س = ٠$$

$$\therefore س = ١١ \text{ أو } س = ٦$$

الجذر الآخر هو : $١١ = س$

حل آخر

نكون المعادلة التي جذراها ٢ ، ٣

∴ المعادلة هي :

$$٠ = (٣ - س) (٢ - س)$$

$$٠ = (٣ - س) ٢ - (٣ - س) س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٢ - ٣ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

جذراهما ٢ ، ٣ وتساوى الحد المطلق فيهما

∴ بمقارنة المعاملات

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

∴ بتحليل المقدار إلى عاملين

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

مثال ٧

إذا كانت :

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

أوجد قيم : ٢ ، ٣ ، ٤

إذا علم أن جذرى المعادلة د (س) = ٠ هما :

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

الحل

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

مثال ٦

إذا كان (س - ٣) أحد عاملي المقدار

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

ثم أوجد العامل الآخر

الحل

∴ (س - ٣) أحد عاملي المقدار

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$\therefore \boxed{3 = -3}$$

$$\therefore د(س) = 3 + س^2 = 3 - س$$

$$\therefore 3, \frac{1}{3} \text{ هما جذرى المعادلة: } د(س) = 0$$

$$\therefore 3, \frac{1}{3} \text{ هما جذرى المعادلة}$$

$$\therefore \boxed{3 + س^2 = 3 - س} \leftarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore \text{ نكون المعادلة التى جذراها } 3, \frac{1}{3}$$

$$\therefore (س - 3) (س + \frac{1}{3}) = 0$$

$$\therefore (س - 3) (3س + 1) = 0$$

$$\therefore 3س^2 + س - 3س - 1 = 3س^2 - 2س - 1$$

$$\therefore 3س^2 - 5س - 3 = 0 \leftarrow \textcircled{2}$$

$$\text{المعادلتان } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ جذراهما: } 3, \frac{1}{3}$$

والمعادلتان تشتركان فى حد من حدودهما

\therefore بمقارنة المعاملات فى المعادلتين

$$\therefore \boxed{3 = 3} , \boxed{-5 = -2}$$

مقدمة عن الأعداد المركبة (ك)

٢ القوى المختلفة

لاحظ :

$$١ = ٤$$

$$١ \times ١ = ٤ \times ٤ = ٨$$

$$١ = ١ \times ١ \times ١ = ٤ \times ٤ \times ٤ = ١٦$$

$$١ = ٤ = ٨ = ١٦ = ٣٢ = ٦٤$$

ملحوظة

$$١ = \frac{\text{عدد يقبل القسمة على } ٤}{(٤)}$$

٣ قوى العدد (٤) السالبة

لايجاد قيمة $٤^{-١}$ نجمع على الأس

مضاعف العدد ٤ الأكبر من ٤ مباشرة

$$٤^{-١} = ٤^{-١+١} = ٤^٠ = ١$$

$$٤^{-٣} = ٤^{-٣+١٠} = ٤^٧ = ١٦٣٨٤$$

٤ : قوى العدد (٤) بوجه عام

$$٤^٠ = ١ ، ٤^١ = ٤$$

$$٤^١ \times ٤^١ = ٤^{١+١} = ٤^٢ = ١٦$$

$$٤^٢ \times ٤^٢ = ٤^{٢+٢} = ٤^٤ = ٢٥٦$$

$$٤^٣ \times ٤^٣ = ٤^{٣+٣} = ٤^٦ = ٤٠٩٦$$

$$٤^٤ \times ٤^٤ = ٤^{٤+٤} = ٤^٨ = ٦٥٥٣٦$$

نعلم أن

المعادلة : $١ + ٢ = ٣$ ليس لها حل في

مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)

لأن : $١ - ٢ = -١$

$$١ - ٢ = -١ \Rightarrow ١ - ٢ = -١$$

$$\emptyset = \text{م. ح.}$$

لابد من البحث عن مجموعة جديدة

من الأعداد لحل هذه المعادلة

العدد التخيلي

هو العدد الذي مربعه يساوي (-١)

$$١ - ٢ = -١ \text{ أو } ١ - ٢ = -١$$

وله الخاصية التالية : $١ - ٢ = ١ - ٢$

$$١ - ٢ = ١ - ٢$$

$$٢ - ٢ = ٤ - ٢$$

$$١ - ٢ \times ١ - ٢ = ١ - ٢ \times ١ - ٢$$

$$١ - ٢ = ١ - ٢$$

قوى العدد (٤)

١ القوى الأساسية

$$١ = ١ ، ١ = ١$$

$$١ = ١ ، ١ = ١$$

لمعرفة قيمة (ت) مرفوعة لأس أى عدد

نقسم الأس على ٤ ونحذف العدد الصحيح

فإذا كان المتبقى كما بالشكل

٠,٥	٠,٢٥
١ -	ت
ت -	١
٠,٧٥	٠,٠٠

فمثلاً:

$$ت^{٢٧٥} = \dots\dots\dots$$

نقسم الأس على ٤

$$٢٧٥ \div ٤ = ٦٨,٧٥$$

نبحث عن ٠,٧٥ فى الشكل

فيكون الناتج هو : (ت -)

مثال ٢

أوجد فى أبسط صورة كلاً مما يأتى

$$١٨ - ت$$

$$\frac{١}{٥ - ت}$$

الحل

$$١ = ت^٨ \quad ١ \times ت^{-٥} = \frac{١}{٥ - ت}$$

$$ت^٨ \times ت^{-٥} =$$

$$ت^{٨ + (-٥)} =$$

$$ت^٣ =$$

$$٣ - ت =$$

$$١ = ت^٢ \quad ١ \times ت^{-١٨} = ت^{-١٨}$$

$$٢٠ + (-١٨) = ٢ \quad ت^٢ \times ت^{-١٨} =$$

$$٢ - ١٨ = -١٦ \quad ت^{-١٦} =$$

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

$$١٥ - ت = \dots\dots\dots$$

$$١ - ٥ \quad ١ \oplus \quad ت - ٥ \quad ١ - ت$$

$$٢٤ - ت = \dots\dots\dots$$

$$١ - ٥ \quad ١ \oplus \quad ت - ٥ \quad ١ - ت$$

$$٣٣ - ت = \dots\dots\dots$$

$$١ - ٥ \quad ١ \oplus \quad ت - ٥ \quad ١ - ت$$

$$١٩ - ت = \dots\dots\dots$$

$$١ - ٥ \quad ١ \oplus \quad ت - ٥ \quad ١ - ت$$

أبسط صورة للمقدار:

$$\dots\dots\dots = (١ + ت)^٢$$

مثال ٣

أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة

١) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

٢) $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$

٣) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

٤) $(-3) \times (-2)$

٥) $(1 + 1)$

الحل

١) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{8} \times \sqrt{2} =$

$\sqrt{16} =$

$4 \times 1 =$

$4 =$

٢) $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7} \times \sqrt{7}$

$7 =$

٣) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} =$

$3 \times 1 =$

$3 =$

$3 =$

٤) $(-2) \times (-3)$

$4 \times 9 =$

$36 \times 1 =$

$36 = 1 \times 36 =$

٥) $(1 + 1)$

$[(1 + 1)] =$

$[1 + 1 + 1] =$

$1 + 1 = 2$

$[1 + 1 + 1] =$

$[2] =$

$2 \times 2 =$

$4 =$

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة :

$$ع = ب + ت$$

حيث : $ب$ ، أعداد حقيقية ، $ت = ١ -$

ويسمى : $ب$ الجزء الحقيقي

ويسمى : $ت$ الجزء التخيلي

ملحوظة

إذا كان : $ع = ب + ت$ وكان :

١ $ب = \text{صفر}$ أى أن : $ع = ب$

فإن العدد $ع$ يسمى حقيقى صرف

٢ $ب = \text{صفر}$ أى أن : $ع = ت$

فإن العدد $ع$ يسمى تخيلى صرف

٣ إذا كان : $ع = \text{صفر}$

فإن : $ب = \text{صفر}$ ، $ت = \text{صفر}$

مثال ٤

أوجد قيمتى $س$ ، $ص$ التى تحقق :

$$٠ = ت + (٦ - س) + (٣ ص + س)$$

الحل

∴ العدد المركب : $٠ = ت + ب$

عندما $٠ = ب$ ، $٠ = ت$

∴ العدد المركب : $٠ = ت + ب$

عندما $٠ = ب$ ، $٠ = ت$

$$٠ = ٦ - س$$

$$١ \leftarrow ٦ = س$$

$$٢ \leftarrow ٠ = ٣ ص + س$$

بالتعويض من ١ فى ٢

$$٠ = ٦ + ٣ ص$$

$$٦ - = ٣ ص$$

بالقسمة على ٣ للطرفين

$$٢ - = ص$$

ملحوظة

١ مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة

جزئية من مجموعة الأعداد المركبة

$$ع \supset \subseteq$$

كل عدد حقيقى هو عدد مركب فيه

الجزء التخيلى = صفر

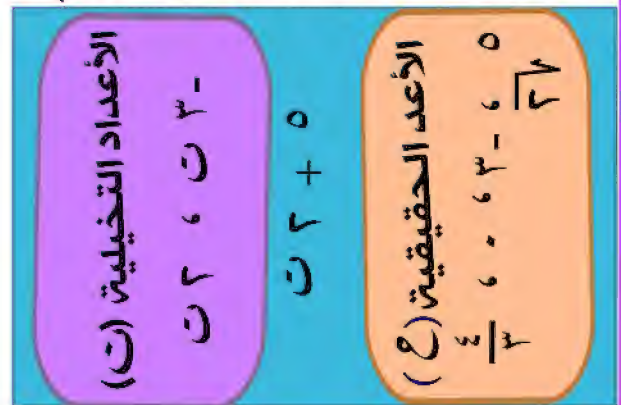
$$٠ = ٣ + ٣ ت$$

٢ جميع الأعداد التخيلية هى أعداد مركبة

فيها الجزء الحقيقى = صفر

$$٢ ت = ٢ + ٠$$

مجموعة الأعداد المركبة (ك)



تساوي عددين مركبين

إذا كان : $١ع = ١س + ١ص$ ، $٢ع = ٢س + ٢ص$

عددان مركبان

فإن : $١ع = ١ع$

إذا تحقق الشرطان الآتيان معا

① $١س = ١س$ ② $١ص = ١ص$

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان : $١ع = ١س + ١ص$ ، $٢ع = ٢س + ٢ص$

عددان مركبان

فإن :

 $١ع + ٢ع$

$$= (١س + ١ص) + (٢س + ٢ص)$$

 $١ع - ٢ع$

$$= (١س - ٢س) + (١ص - ٢ص)$$

مثال ٥

أوجد قيمتي $س$ ، $ص$ التي تحقق

$$(١س + ١ص) + ٣ت = ٥ + (٢س - ١ص)ت$$

الحل

العددان

$$(١س + ١ص) + ٣ت = ٥ + (٢س - ١ص)ت$$

متساويان

مثال ٦

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

$$\text{إذا كان : } ع_1 = ص_1 + س_1$$

$$ع_2 = ص_2 + س_2$$

عددان مركبان

فإن :

$$ع_1 \times ع_2 = (ص_1 + س_1)(ص_2 + س_2)$$

$$= (ص_1 ص_2 + ص_1 س_2 + س_1 ص_2 + س_1 س_2)$$

مثال ٨

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق

$$س + ص ت = (ت٢ + ٣)(ت٤ + ١)$$

الحل

$$\therefore س + ص ت = (ت٢ + ٣)(ت٤ + ١)$$

$$= ٣(ت٤ + ١) + ت٢(ت٤ + ١)$$

$$= ٣ + ٣ت٤ + ت٢ + ت٢ت٤$$

$$\therefore ت = ١ -$$

$$= ٣ + ت٢ + ٣ت٤ - ٨$$

$$= ٥ - ت٤$$

$$\therefore س + ص ت = ٥ - ت٤$$

$$\therefore س = ٥ - ، ص = ١٤$$

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق :

$$س + ص ت = (ت٢ + ١) + (ت٢ + ٣)$$

الحل

بوضع الطرف الايسر في أبسط صورة

$$س + ص ت = (ت٢ + ١) + (ت٢ + ٣)$$

$$\therefore س + ص ت = ٧ + ٤$$

بمساواة الطرفين

$$\therefore س = ٤ ، ص = ٧$$

مثال ٧

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق :

$$س + ص ت = (ت٢ + ١) - (ت٢ - ٢)$$

الحل

بوضع الطرف الايسر في أبسط صورة

$$\therefore س + ص ت = (ت٢ + ١) - (ت٢ - ٢)$$

$$\therefore س + ص ت = ٣ + ٢ - ت٢$$

$$\therefore س + ص ت = (٢ - ١) + (ت٢ + ٤)$$

$$\therefore س + ص ت = ١ - + ت٦$$

بمساواة الطرفين

$$س = ١ - ، ص = ٦$$

طرح عدنان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$$ع_1 = ب + ١ ، ع_2 = ب - ١$$

فإن

$$ع_1 - ع_2 = (ب + ١) - (ب - ١)$$

$$= ب + ١ - ب + ١$$

،

$$ع_1 - ع_2 = ب + ١ - ب + ١$$

$$= ٢$$

مثال ١٠

إذا كان ع ، ع عدنان مركبان :

$$ع_1 = ٥ + ٤ ، ع_2 = ٥ - ٤$$

فأوجد : ١) ع + ع ، ٢) ع - ع

الحل

$$١) ع + ع = (٥ + ٤) + (٥ - ٤)$$

$$= ١٠$$

$$٢) ع - ع = (٥ + ٤) - (٥ - ٤)$$

$$= ٥ + ٤ - ٥ + ٤$$

$$= ٨$$

مثال ٩

أوجد ناتج مايتى

$$(٧ - ت) (٣ + ٢ت)$$

الحل

$$(٧ - ت) (٣ + ٢ت)$$

$$= ٧(٣ + ٢ت) - ت(٣ + ٢ت)$$

$$= ٢١ + ١٤ت - ٣ت - ٢ت²$$

$$= ٢١ + ١١ت + ٢$$

$$= ٢٣ + ١١ت$$

العدنان المترافقان

هما عدنان يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى فقط

العدد $١ + ب + ٢$ مترافق هو $١ - ب + ٢$

العدد	٢-٣	٥+	٣	٧	٥-	٢-
مترافق	٣+	٥-	٣-	٧	٥+	٢-

جمع عدنان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$$ع_1 = ب + ١ ، ع_2 = ب - ١$$

فإن

$$ع_1 + ع_2 = (ب + ١) + (ب - ١)$$

$$= ٢ب$$

ضعف الجزء الحقيقى =

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 2 + 2 + 4 + 9 = (4 + 9) + 2 + 2 \\
 &= 13 + 2 + 2 = 17 \\
 &= 13 + 2 + 2 = 17
 \end{aligned}$$

مثال ١٢

قيمة المقدار :

$$\frac{(س + ص ت) (س - ص ت)}{س^2 + ص^2} =$$

الحل

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(س + ص ت) (س - ص ت)}{س^2 + ص^2} = \text{المقدار} \\
 &= \frac{س^2 - ص^2 ت^2}{س^2 + ص^2} = 1
 \end{aligned}$$

قسمة عددين مركبين

لوضع العدد : $\frac{س + ٢}{س + ح}$ على الصورة :

س + ص ت نضرب في مرافق المقام بسطا ومقاما

وهو (ح - س ت)

مثال ١٣

أكتب العدد : $\frac{٥}{س + ١}$ على الصورة : $\frac{س + ٢}{س + ح}$

الحل

بالضرب في مرافق المقام وهو (س - ١)

بسطا ومقاما

ضرب العددين المترافقان

لأى عددين مترافقين

$$\frac{ع}{س + ٢} = \frac{ع}{س + ٢} ، \frac{ع}{س - ٢} = \frac{ع}{س - ٢}$$

فإن :

$$\frac{ع}{س + ٢} \times \frac{ع}{س - ٢} = \frac{ع^2}{س^2 - ٢^2}$$

$$= \frac{ع^2}{س^2 - ٢^2} = \frac{ع^2}{س^2 - ٢^2}$$

$$= \frac{ع^2}{س^2 - ٢^2}$$

$$= \text{مربع الجزء الحقيقي} + \text{مربع الجزء التخيلي}$$

حاصل ضرب العددين المترافقان

$$= \text{مربع الجزء الحقيقي} + \text{مربع الجزء التخيلي}$$

فمثلاً :

$$١٣ = ٤ + ٩ = (٣ - ٢) (٣ + ٢)$$

،

$$٢٦ = ١ + ٢٥ = (٥ + ١) (٥ + ١)$$

مثال ١١

اوجد في أبسط صورة قيمة المقدار :

$$(١ + س)^2 + (٣ + س) (٣ - س)$$

الحل

$$= (١ + س)^2 + (٣ + س) (٣ - س)$$

حاصل ضرب عددين مترافقين

مربع قوس من حدين

مثال ١

$$\text{إذا كان: } \frac{13}{t-5} = \text{س} , \frac{t+3}{t+1} = \text{ص}$$

أثبت ان: س ، ص مترافقان

ثم أوجد قيمة المقدار: س + ص + ص

الحل

$$\text{س} = \frac{13}{t-5}$$

بالضرب $\times (t+5)$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{س} = \frac{(t+5)13}{(t+5)(t-5)}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(t+5)13}{1+25}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(t+5)13}{26}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \leftarrow 1$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{t+3}{t+1}$$

بالضرب $\times (t-1)$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{ص} = \frac{(t-1)(t+3)}{(t-1)(t+1)}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{t^2-3-t+3}{1+1}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{t^2-t-3+3}{1+1}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{t-5}{2}$$

$$\frac{(t-1)5}{(t-1)(t+1)} = \frac{5}{t+1}$$

$$\frac{(t-1)5}{t+1} =$$

$$\frac{(t-1)5}{5} =$$

$$= t-1$$

مثال ١٤

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق

$$\frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = 3 + 5$$

الحل

$$\therefore \frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = 3 + 5$$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$\therefore \frac{(س^2 + ص^2)(س - ص)}{(س + ص)(س - ص)} = 3 + 5$$

$$\therefore \frac{(س^2 + ص^2)(س - ص)}{س^2 - ص^2} = 3 + 5$$

$$\therefore 3 + 5 = س - ص$$

$$\therefore 8 = س - ص$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \text{ ت} \quad \text{②} \leftarrow$$

من : ① ، ②

نجد أن س ، ص مترافقان

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{س} - \text{ص} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{س} + \text{ص} = \frac{5}{3} \quad \text{س} - \text{ص} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{المقدار} = \text{س} + \text{ص} + \text{س} - \text{ص}$$

$$\text{بإضافة : س} + \text{ص} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \text{س} + \text{ص} + \text{س} - \text{ص} = 2\text{س}$$

$$= (2\text{س} + \text{ص}) - \text{ص} = 2\text{س}$$

$$= 2(5) = 10$$

$$= 10 - 25 = -15$$

مثال ١

عين نوع جذري المعادلة التربيعية

$$x^2 + 5x - 6 = 0, \quad x \neq 0$$

الحل

$$\therefore x^2 + 5x - 6 = 0, \quad x \neq 0 \quad \text{بالضرب في } x \text{ للطرفين}$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 5x = 0$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 5x = 0$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 5x = 0, \quad x \neq 0$$

$$\therefore \text{المميز} = 6^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 100$$

$$\therefore \text{المميز} = 100 - 24 = 76 > 0$$

$$\therefore 76 > 0$$

\therefore الجذران حقيقيان مختلفان

المميز = صفر فإن

- جذري المعادلة التربيعية حقيقيان متساويان وكل

$$\frac{b}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- الجذران مركبان مترافقان

- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور

السينات في النقطة $(0, \frac{b}{a})$

الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

مميزها يساوى الصفر

$$b^2 - 4ac = 0$$

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

عند حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث

a, b, c ، أعداد حقيقية، $a \neq 0$

باستخدام القانون العام فإننا نحصل على الجذرين:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونجد أن كلا من الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{b^2 - 4ac}$

ويسمى المقدار: $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية

فإذا كان المميز

المميز < 0 (موجباً) فإن:

- جذري المعادلة التربيعية حقيقيان مختلفان

ويكون منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة

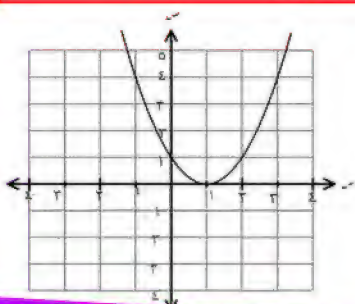
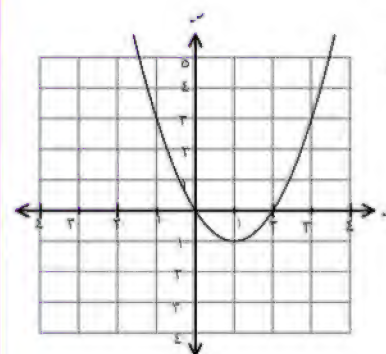
التربيعية يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين

الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

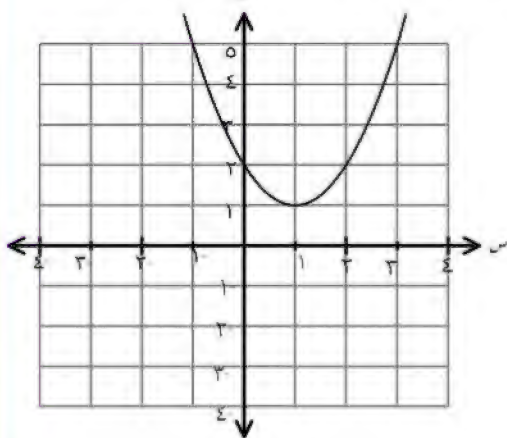
ويكون

$$b^2 - 4ac > 0$$



مثال ٢

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية مميزها > 0



يمثل منحنى دالة تربيعية

$$D(s) = s^2 + 2s + 3$$

ويكون المقدار: $4 - 2 = 2 > 0$

مثال ٣

عين نوع جذري المعادلة التربيعية

$$s^2 - 3s + 5 = 0$$

الحل

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$9 - 20 = -11 < 0$$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ المعاملات أعداد حقيقية

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين مترافقان

عين نوع جذري المعادلة التربيعية

$$s^2 + \frac{9}{s} - 6 = 0, s \neq 0$$

الحل

$$s^3 + 9 - 6s = 0, s \neq 0$$

بالضرب في s للطرفين

$$s^3 + 9 - 6s = 0$$

$$s^3 - 6s + 9 = 0$$

$$1 = 0, 1 = 0, 6 = 9$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 9 = 0$$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

$$\Delta = 36 - 4 \times 9 = 0$$

ومنحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور

السينات في (3, 0)

المميز > 0 صفر (سالب) فإن

الجذران مركبين غير حقيقيين

إذا كانت المعاملات: a, b, c أعداد حقيقية

كان الجذران مركبين مترافقين

منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة

لا يقطع مع محور السينات

مثال ٤

أثبت أن جذرى المعادلة :

$٧س^٢ - ١١س + ٥ = ٠$ مركبان غير حقيقيين ثم
استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

$$٧ = ٧ ، ١١ = -١١ ، ٥ = ٥$$

$$\Delta = ١٢١ - ٤ \times ٧ \times ٥ = ١٢١ - ١٤٠ = ١٩$$

$$\Delta = ١٩ > ٠$$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

$$س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}}{٧ \times ٢}$$

$$س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}}{١٤}$$

$$س = \frac{١١}{١٤} \pm \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$$

$$م.ح = \left\{ \frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤} ، \frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤} \right\}$$

مثال ٥

أوجد قيمة ٢ التي تجعل جذرى المعادلة :

$$س^٢ - ٩س + ٢ = ٠ \text{ متساويين}$$

الحل

$$١ = ١ ، ٩ = -٩ ، ٢ = ٢$$

∴ الجذران متساويان

$$\Delta = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٩ = -٩ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٩ = -٩ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٩ = -٩ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٩ = -٩ ، ٠ = ٠$$

مثال ٦

إذا كان جذرا المعادلة :

$$س^٢ - ٢س + ٤ = ٠$$

متساويين فأوجد قيمة ٢ الحقيقية ثم أوجد

الجذرين

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$س^٢ - ٢س + ٤ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٤ = -٤ ، ٠ = ٠$$

∴ الجذران متساويان

$$\Delta = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٤ = -٤ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٤ = -٤ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٤ = -٤ ، ٠ = ٠$$

$$٢ = ٢ ، ٤ = -٤ ، ٠ = ٠$$

عند $2 =$

∴ المعادلة هي :

$$س^2 - 6س + 9 = 0$$

$$(س - 3)^2 = 0 \quad ∴ س = 3$$

$$س = 3$$

عند $2 =$

∴ المعادلة هي :

$$س^2 - 2س + 1 = 0$$

$$(س - 1)^2 = 0 \quad ∴ س = 1$$

$$س = 1$$

∴ الجذران متساويان وكل منهما $1 =$

مثال ٧

أوجد قيم $م$ التي تجعل المعادلة :

جذور حقيقية :

$$(م + 1)س^2 - 2مس + م = 0$$

ليس لها جذور حقيقية

الحل

$$∴ م = 1, م = -1, م = 0$$

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ المميز > 0

$$∴ 4 - 4 > 0$$

$$∴ (-م) (م - 4) - 4(م + 1) > 0$$

$$∴ 4 - 4 - 4م - 4 > 0$$

$$∴ -4م - 4 > 0$$

بالقسمة على -4 للطرفين

$$∴ م < -1 \quad ∴ م \in (-\infty, -1]$$

مثال ٨

أثبت أنه لجميع قيم $ا, ب$ يكون جذرا المعادلة

$$(س - ا)(س - ب) = ٥$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$∴ س^2 - (ا + ب)س + ا ب - ٥ = 0$$

$$∴ س^2 - (ا + ب)س + (ا ب - ٥) = 0$$

$$\text{المميز} = 4 - 4(ا ب - ٥)$$

$$\text{المميز} = 4(ا ب - ٥) - 4(ا ب - ٥)$$

$$= 4(ا ب - ٥) - 4(ا ب - ٥)$$

$$= 4(ا ب - ٥) - 4(ا ب - ٥)$$

$$= 4(ا ب - ٥) - 4(ا ب - ٥)$$

$$∴ \text{المقدار} (ا ب - ٥) \leq 0$$

∴ المميز ≤ 0 ∴ جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

ملحوظة

إذا كانت المعاملات : a, b, c ، ح في المعادلة
 $ax^2 + bx + c = 0$ أعداداً نسبية
 وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران
 حقيقيين نسبيين

مثال ١٠

إذا كان : m عددين نسبيين فأثبت
 أن جذرى المعادلة :
 $lx^2 + (m - l)x - m = 0$
 عددين نسبيين

الحل

$$\because l = m, \quad b = (m - l), \quad c = -m$$

l, m أعداد نسبية

\therefore المعاملات أعداد نسبية

\therefore المميز $b^2 - 4ac = (m - l)^2 - 4(-m)l$

$$= (m - l)^2 + 4ml = (m + l)^2$$

$$= l^2 - 2ml + m^2 + 4ml = l^2 + 2ml + m^2$$

$$= (l + m)^2$$

$$= (m + l)^2$$

$$= \text{مربع كامل}$$

\therefore الجذران نسبيين

مثال ٩

أثبت أن : جذرا المعادلة :

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \text{ أعداد نسبية}$$

الحل

$$\because a = 3, \quad b = -5, \quad c = -2$$

\therefore المعاملات أعداد نسبية

\therefore المميز $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-2)$

$$= 25 + 24 = 49$$

$$= 25 + 24 = 49$$

$$= (7)^2 = \text{مربع كامل}$$

\therefore الجذران حقيقيان نسبيين

مثال ١١

أوجد قيم العدد الحقيقي k التي تحقق أن

$$\text{المعادلة: } (k-2) \cdot 2 - 2k + 3 = 0$$

لها جذران مركبان غير حقيقيين

الحل

$$\therefore (k-2) = 2, \quad 2 - 2k = 3, \quad k = 1$$

\therefore الجذران نسبيا

$$\therefore \text{المميز} = 2 - 2k = 2$$

$$\therefore \text{المميز} = 2 - 2k = 2 \times (k-2) \times 2$$

$$= 2 - 2k + 8 = 8 - 2k$$

\therefore الجذران مركبان غير حقيقيين

$$\therefore \text{المميز} > 0 \quad \therefore 8 - 2k > 0$$

$$\therefore k < 4 \quad \therefore k \in (-\infty, 4)$$

في المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ٧ = ٠$

$$٣ = پ ، ٥ = ب ، ٧ = ح$$

$$\frac{٥}{٣} = \frac{ب}{پ} = \text{مجموع الجذرين}$$

٢ حاصل ضرب جذري المعادلة

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} \times \frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ح \times$$

$$\frac{(ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})(ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})}{٢^٢} =$$

$$\frac{ب^٢ - (٤ - ٢ب + ب^٢)}{٢^٢} =$$

$$\frac{ب^٢ - ٤ + ٢ب - ب^٢}{٢^٢} =$$

$$\frac{٢ب - ٤}{٢^٢} =$$

$$\frac{ب - ٢}{٢} =$$

∴ حاصل ضرب جذري أى معادلة

$$\frac{\text{الحذ المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{ب}{پ} =$$

نمثلاً :

في المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ٧ = ٠$

$$٣ = پ ، ٥ = ب ، ٧ = ح$$

$$\frac{٧}{٣} = \frac{ب}{پ} = \text{مجموع جذري المعادلة}$$

العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

إذا كان ل ، م

التربيعية: $١س^٢ + ب + ح = ٠$

فإن :

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ل$$

$$\frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = م ،$$

ويكون

١ مجموع جذري المعادلة التربيعية

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} + \frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ل + م =$$

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢} + ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} =$$

$$\frac{٢ب}{٢} = \frac{٢ب}{٢} =$$

مجموع جذري أى معادلة تربيعية

$$\frac{ب}{٢} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} =$$

مثال ٢

أوجد قيمة p ، b إذا كان : 2 ، 3 هما جذرا المعادلة $bx^2 + px + 2 = 0$.

الحل

$\therefore 2, 3$ هما جذرا المعادلة

$$\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2} = 2 + 3$$

$$\frac{p}{b} = 5 \quad \therefore p = 5b$$

\therefore حاصل ضرب الجذرين = الحد الثابت
 $\frac{\text{معامل } x^2}{\text{معامل } x} = 2 \times 3$

$$\frac{b}{1} = 2 \times 3$$

$$\frac{b}{1} = 6 \quad \therefore$$

$$b = 6$$

مثال ٣

إذا كان مجموع جذري المعادلة

التربيعية : $2x^2 + bx + c = 0$ هو $\frac{5}{2}$ أوجد قيمة b

الحل

\therefore مجموع الجذرين = $\frac{b}{a}$

$$\frac{b}{2} = \frac{5}{2} \quad \therefore$$

$$b = 5$$

$$b = 5$$

٣ الفرق بين الجذرين

$$= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm = m - n$$

مثال ١

إذا كان 2 ، 3 هما جذرا المعادلة

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

فأوجد :

$$(1) m + n \quad (2) m - n \quad (3) m - n$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$\therefore 3x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$a = 3, b = 5, c = 7$$

$$(1) m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$$(2) m - n = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3}$$

$$(3) m - n = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm = \frac{\sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} \pm =$$

$$\frac{\sqrt{25 - 84}}{6} \pm = \frac{\sqrt{-59}}{6} \pm =$$

$$\frac{\sqrt{25 - 84}}{6} \pm = \frac{\sqrt{-59}}{6} \pm =$$

$$\frac{\sqrt{25 - 84}}{6} \pm = \frac{\sqrt{-59}}{6} \pm =$$

مثال ٥

ل ، م هما جذرا المعادلة
 $٢س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$ فأوجد قيمة ح
 التي تجعل : ل - م = ٧

الحل

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة

$$(١) \leftarrow ٣ = \frac{٦}{٢} = م + ل$$

$$(٢) \leftarrow \frac{٥}{٢} = م \cdot ل$$

$$(٣) \leftarrow ٧ = ل - م$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ينتج أن

$$٥ = ل \cdot ١٠$$

بالتعويض في (١)

$$٨ - = م \leftarrow ٣ = م + ٥$$

بالتعويض في (٣)

$$\frac{٥}{٢} = (٨ -) \times ٥$$

$$\frac{٥}{٢} = ٤٠ -$$

$$٨٠ - = ح$$

مثال ٤

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما
 لكل من المعادلات الآتية

$$(١) س (٣ - س) = ٤$$

$$(٢) (١ + س^٢) (٥ - س) = ٣$$

الحل

$$(١) س (٣ - س) = ٤$$
 بوضع المعادلة

على الصورة العامة

$$٠ = ٤ - ٣س + س^٢$$

$$٠ = ٤ - ٣س + س^٢$$

$$١ = ١ ، ٣ = ٣ ، ٠ = ٠$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{٣}{١} = ٣$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{٠}{١} = ٠$$

$$(٢) (١ + س^٢) (٥ - س) = ٣$$

بوضع المعادلة على الصورة العامة

$$٣ = (٥ - س) + (٥ - س)س^٢$$

$$٣ = ٥ - س + ٥س^٢ - س^٣$$

$$٠ = ٨ - ٩س + ١٠س^٢ - س^٣$$

$$\therefore ٨ = ٨ ، ٩ = ٩ ، ١٠ = ١٠$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{٩}{١} = ٩$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{٨}{١} = ٨$$

حل آخر

$$\therefore 1 = p, 2 = b, 3 = c$$

نفرض أن الجذر الآخر هو ل

$$\therefore \text{ل}, (1 + \sqrt{2}) \text{ هما جذرا المعادلة}$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{b}{p}$$

$$\therefore \text{ل} + 1 + \sqrt{2} = 2$$

$$\therefore \text{ل} = 2 - 1 - \sqrt{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{الجذران هما } -1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = (1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2})$$

$$\therefore 1 = 2 + 1$$

$$\therefore 1 = 2$$

ملاحظات مهمة

$$(1) \text{ في المعادلة التربيعية: } p x^2 + b x + c = 0$$

$$\text{إذا كان: } 1 = p$$

$$\text{فإن: مجموع الجذرين} = -b$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = c$$

$$\text{في المعادلة: } p x^2 + b x + c = 0$$

$$\text{مجموع الجذرين} = -\frac{b}{p}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{p}$$

ملحوظة

في المعادلة التربيعية:

$$p x^2 + b x + c = 0 \text{ التي معاملاتها}$$

صورتها حقيقية إذا كان أحد الجذرين عدد

مركب غير حقيقي فإن الجذر الآخر يكون

عدد مركب مرافق له

مثال ٦

إذا كان $(1 + \sqrt{2})$ هو أحد جذري

المعادلة $p x^2 + b x + c = 0$ حيث $c \neq 0$

أوجد

(١) قيمة الجذر الآخر (٢) قيمة: ح

الحل

∴ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي

∴ الجذر الآخر مرافق له

∴ الجذر الآخر هو $(-1 - \sqrt{2})$

∴ $(-1 - \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2})$ هما جذرا المعادلة

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = (-1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$\therefore 1 = 2 + 1$$

$$\therefore 1 = 2$$

(٤) إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة ٢:٣
نفرض أن الجذرين هما : ٢ل ، ٣ل

مثال ٨

إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة :

$$٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠ \text{ هي } ٢:٣$$

والجذرين موجبين أو جدر قيمة ب

الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ل ، ٣ل

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$$

$$\frac{٣}{٨} = ٢ل + ٣ل$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٥ل$$

$$\therefore ٤٠ = ٣ل \leftarrow (١)$$

$$\text{، حاصل ضرب الجذرين} = \frac{٣}{٨}$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٢ل \times ٣ل$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٦ل^٢$$

$$\therefore \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٦} \times \frac{٣}{٨} = ٦ل^٢$$

$$\therefore \frac{١}{٤} \pm = ٦ل \leftarrow (٢)$$

بالتعويض من (٢) في (١)

$$\text{عند } ٦ل = \frac{١}{٤}$$

(٢) في المعادلة التربيعية $٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠$

إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس بمعنى

للآخر فإن : فإن مجموع الجذرين = صفر

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٠ \quad \therefore ٠ = ٣$$

(حيث ب معامل س)

(٣) في المعادلة التربيعية $٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠$

إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس ضرب

للآخر فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ١ \quad \therefore ٨ = ٣$$

مثال ٧

أوجد قيمة ل التي تجعل أحد جذري المعادلة

$$٣س^٢ - (٢-ل)س + (٤+ل) = ٠$$

معكوس ضرب للجذر الآخر

الحل

أحد جذري المعادلة معكوس ضرب للآخر

فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ١ \quad \therefore ٨ = ٣$$

$$٣ = ٨ ، ٤ + ل = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٤ + ل$$

$$٤ - ٣ = ل$$

$$\therefore ١ = ل$$

$$\frac{7}{p} \times 25 = 6 \therefore$$

$$25 = 6p \therefore$$

مثال ١٠

أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذري المعادلة
 $4x^2 - mx + 7 = 0$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

الحل

$$4 = p, \quad m = -m, \quad 7 = c$$

نفرض أن الجذرين هما : α, β ، $\alpha + \beta = 3$

$$\frac{m}{p} = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\therefore \frac{m}{4} = 3 + \alpha + \beta$$

$$\frac{m}{4} = 3 + \alpha + \beta \quad \text{بالمضرب } 4 \times \text{ للطرفين}$$

$$\therefore m = 12 + 4\alpha + 4\beta \quad \leftarrow (1)$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{m}{p}$$

$$\therefore \frac{7}{4} = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \frac{7}{4} \quad \text{بالمضرب } 4 \times \text{ للطرفين}$$

$$\therefore 4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta = 7$$

$$0 = (7 + 4\alpha^2)(1 - 4\alpha^2)$$

$$\text{أما } 1 - 4\alpha^2 = 0 \therefore \frac{1}{4} = \alpha^2$$

$$\text{أو } 7 + 4\alpha^2 = 0 \therefore \frac{7}{4} = \alpha^2$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore 10 = \frac{1}{4} \times 40 = 10$$

عند $\alpha = -\frac{1}{4}$ مرفوض (لأن الجذرين موجبين)

مثال ٩

إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة :

$$4x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \text{كنسبة } 2:3 \text{ أثبت أن}$$

$$25 = 6p$$

الحل

نفرض أن الجذرين هما α, β ، $\alpha + \beta = 3$

$$\frac{\text{مجموع الجذرين}}{\text{معامل } x} = \frac{\text{معامل } x^2}{\text{معامل } x^0}$$

$$\therefore \frac{m}{p} = \alpha + \beta$$

$$\therefore \frac{m}{p} = 5$$

$$\therefore \frac{m}{p} = 5 \quad \leftarrow (1)$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{m}{p}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \frac{m}{p}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 10 \quad \leftarrow (2)$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore \frac{m}{p} = 10 \left(\frac{m}{p} \right)$$

$$\therefore \frac{m}{p} = \frac{10}{25} \times 6$$

مثال ١٢

أوجد الشرط اللازم ليكن يكون أحد جذري المعادلة

$$x^2 + px + q = 0$$

مساويا ضعف الجذر الآخر

الحل

∴ أحد الجذرين ضعف الجذر الآخر

∴ نفرض أن الجذرين هما : α ، 2α

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \alpha + 2\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 3\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 3\alpha \quad \leftarrow (1)$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \text{حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \alpha \times 2\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 2\alpha^2 \quad \leftarrow (2)$$

بالتعويض من (1) في (2)

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = (2\alpha^2)^2$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = (2\alpha^4)^2$$

بالضرب في $2\alpha^9$ للطرفين

$$2\alpha^9 \times \frac{\alpha}{2\alpha} = 2\alpha^9 \times 2\alpha^4$$

$$2\alpha^9 = 2\alpha^4$$

وهذا هو الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري

المعادلة: $x^2 + px + q = 0$ ضعف الجذر

الآخر

$$\frac{1}{2} = \alpha$$

$$12 + 4 = 12 + \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

$$16 = 2$$

$$\frac{7}{2} = \alpha$$

$$12 + 28 = 12 + \frac{7}{2} \times 8 = 2$$

$$16 = 2$$

$$16 \pm 2$$

مثال ١١

أوجد قيمة p التي تجعل مجموع جذري المعادلة :

$$x^2 - (2+p)x + 6 = 0$$

$$\text{جذري المعادلة } x^2 + 5x + 6 = 0$$

الحل

$$\frac{2+p}{1} = \text{مجموع جذري المعادلة الأولى}$$

$$2+p =$$

$$\frac{2+p}{1} = \text{حاصل ضرب جذري المعادلة الثاني}$$

$$2+p = 2$$

$$0 = 2 - p - 2$$

$$0 = (2-p)(1+p)$$

$$2=p$$

$$1=-p$$

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

بالضرب $\times 6$ للطرفين

$$\therefore 6s^2 - 13s + 6 = 0$$

(٤) بفرض أن جذري المعادلة هما l ، m

$$l = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

$$\therefore l = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12}$$

$$l = \frac{-2 \pm \sqrt{-140}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 35 \times (-1)}}{12}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12}$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 35 \times (-1)}}{12}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12}$$

مجموع الجذرين $= (-2) + 2 = 0$ صفر

، حاصل ضرب الجذرين $= (-2) \times 2 = -4$

$$-4 = -2 \times 2$$

\therefore المعادلة هي : $s^2 + 4 = 0$

إذا كانت l ، m هما جذرا معادلة تربيعية فإن

المعادلة هي :

$$s^2 - (l+m)s + lm = 0$$

$$s^2 - (\text{مجموع الجذرين})s + \text{حاصل ضربهما} = 0$$

مثال ١

$$(1) \quad 3, 5$$

$$(2) \quad \sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2$$

$$(3) \quad \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

$$(4) \quad \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

الحل

$$(1) \quad \text{مجموع الجذرين} = 3 + 5 = 8$$

$$\text{، حاصل ضرب الجذرين} = 3 \times 5 = 15$$

المعادلة هي : $s^2 - 8s + 15 = 0$

$$(2) \quad \text{مجموع الجذرين} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{وحاصل ضرب الجذرين} = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = 3 - 4 = -1$$

\therefore المعادلة هي : $s^2 - 2\sqrt{3}s - 1 = 0$

$$(3) \quad \text{مجموع الجذرين} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4 + 9}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\text{، حاصل ضرب الجذرين} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

\therefore المعادلة هي : $s^2 - \frac{13}{6}s + 1 = 0$

∴ ل، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 2 = \text{ل}, \\ 5 = \text{ل} + \text{م} \end{cases}$$

$$(1) \quad \therefore \text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل} + \text{م})^2 - 2\text{ل}\text{م}$$

$$21 = 4 - 20 = 2 \times 2 - (5) =$$

$$(2) \quad \sqrt{2 \times 2 - (5)} \pm = \text{ل} - \text{م}$$

$$\sqrt{2 \times 2 - (5)} \pm =$$

$$\sqrt{17} \pm = \sqrt{4 - 20} \pm =$$

$$(3) \quad (\text{ل} + \text{م})(\text{ل} + \text{م}) = \text{ل}^2 + \text{م}^2$$

$$[2 \times 2 - (5)] \times 5 =$$

$$90 = 19 \times 5 = [4 - 20] \times 5 =$$

$$(4) \quad \therefore \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}\text{م}} = \frac{2}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}}$$

$$\frac{(\text{ل} + \text{م})}{\text{ل}\text{م}} =$$

$$\frac{2 \times 2 - (5)}{2} =$$

$$\frac{21}{2} = \frac{4 - 20}{2} =$$

$$(5) \quad \therefore \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ل}}$$

$$\frac{5}{2} =$$

(6) ∴ ل جذر للمعادلة:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \therefore \text{بحقق تساوي طرفيها}$$

$$\therefore \text{ل}^2 - 5\text{ل} + 2 = 0$$

$$\therefore \text{ل}^2 - 5\text{ل} = -2$$

$$\therefore \text{النقار} = (\text{ل}^2 - 5\text{ل}) + 9 =$$

$$7 = 9 + (-2) =$$

بعض العلاقات المهمة

$$(1) \quad \text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل} + \text{م})^2 - 2\text{ل}\text{م}$$

$$(2) \quad (\text{ل} - \text{م})^2 = \text{ل}^2 - 2\text{ل}\text{م} + \text{م}^2$$

$$(3) \quad (\text{ل} + \text{م})(\text{ل} + \text{م}) = \text{ل}^2 + \text{م}^2$$

$$(4) \quad (\text{ل} - \text{م})(\text{ل} - \text{م}) = \text{ل}^2 - 2\text{ل}\text{م} + \text{م}^2$$

$$(5) \quad \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}}$$

$$(6) \quad \frac{(\text{ل} + \text{م})}{\text{ل}\text{م}} = \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}\text{م}} = \frac{2}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}}$$

$$(7) \quad \frac{\sqrt{2 \times 2 - (5)}}{2} \pm = \text{ل} - \text{م}$$

$$\sqrt{2 \times 2 - (5)} \pm =$$

مثال ٢

إذا كانت ل، م هما جذرا المعادلة

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{فأوجد قيمة المقادير الآتية}$$

$$(1) \quad \text{ل}^2 + \text{م}^2$$

$$(2) \quad \text{ل} - \text{م}$$

$$(3) \quad \text{ل}^2 + \text{م}^2$$

$$(4) \quad \frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}}$$

$$(5) \quad \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}}$$

$$(6) \quad \text{ل}^2 - 5\text{ل} + 9$$

$$(7) \quad \text{ل}^2 - 5\text{ل} + \text{م}^2 + 2$$

$$(8) \quad \text{م}^2 - 4\text{م} + \text{ل} + 3$$

الحل

∴ ل، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 2 = \text{ل}, \\ 5 = \text{ل} + \text{م} \end{cases}$$

∴ حاصل ضرب جذري العادلة

$$\begin{aligned} \text{الطرية} = \text{ل}^2 \text{م}^2 &= (\text{ل م})^2 = (-2)^2 = 4 \\ \therefore \text{العادلة الطرية هي :} \\ \text{س}^2 - 13\text{س} + 4 &= 0 \\ \text{س}^2 - 13\text{س} + 4 &= 0 \end{aligned}$$

مثال ٤

إذا كان ل، م هما جذرا العادلة

$$\text{س}^2 - 6\text{س} + 8 = 0$$

فكوت العادلة التي جذراها : ل + ١ ، م + ١

الحل

من العادلة العطاء :

$$\frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \quad \therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \quad \therefore \text{ل} + \text{م} = 6$$

∴ حاصل ضرب الجذرين (ل م) = $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$

$$\therefore \text{ل م} = 8$$

∴ جذرا العادلة الطرية هما ل + ١ ، م + ١

∴ مجموع الجذرين = (ل + ١) + (م + ١)

$$= \text{ل} + \text{م} + 2$$

$$= 6 + 2 = 8$$

∴ حاصل ضرب الجذرين = (ل + ١)(م + ١)

$$= \text{ل م} + \text{ل} + \text{م} + 1$$

$$= 8 + 6 + 1 = 15$$

∴ العادلة هي : $\text{س}^2 - 8\text{س} + 15 = 0$

(٧) ∴ القدار = $2\text{ل}^2 - 5\text{ل} + 2\text{م}^2 + 2$

∴ القدار = $2\text{ل}^2 - 5\text{ل} + 2\text{م}^2 + 2$

$$= 2 + (\text{ل}^2 - 5\text{ل}) + (\text{م}^2 + 2\text{م}) =$$

$$= 2 + (\text{ل}^2 - 5\text{ل}) + (\text{م}^2 + 2\text{م}) =$$

$$= 2 + (-2) + (5) \times 2 - 2 =$$

$$= 17 = 8 - 25 = 2 - 2 - 25 =$$

(٨) ∴ القدار = $3\text{ل}^2 - 4\text{م} + 3\text{ل} + 3$

بإضافة : م ، م للمقدار

القدار = $3\text{ل}^2 - 4\text{م} + 3\text{ل} + 3$

$$= 3\text{ل}^2 - 4\text{م} + 3\text{ل} + 3 =$$

$$= 3 + 5 + 2 - 6 =$$

مثال ٣

إذا كان ل ، م هما جذرا العادلة :

$$\text{س}^2 + 3\text{س} - 2 = 0$$

فكوت العادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

∴ ل ، م هما جذرا العادلة العطاء

$$\therefore \text{ل} + \text{م} = -3$$

$$\text{ل م} = -2$$

∴ مجموع جذري العادلة الطرية = $\text{ل}^2 + \text{م}^2$

$$= (\text{ل} + \text{م})^2 - 2\text{ل م} =$$

$$= (-3)^2 - 2(-2) =$$

$$= 9 + 4 = 13$$

مثال ٦

إذا كانت الفرق بين جذري المعادلة

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \text{ هو } \frac{3}{2}$$

فأوجد قيمة : n

الحل

بفرض أن جذري المعادلة العطا هما n, m

$$\therefore n + m = \frac{9}{2}$$

$$n - m = \frac{3}{2}$$

$$\therefore n - m = \frac{3}{2} \text{ بالتربيع للطرفين}$$

$$\frac{9}{4} = (n - m)^2$$

$$\therefore \frac{9}{4} = (n + m)^2 - 4nm$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{9}{2} \right)^2 - 4nm$$

$$\frac{9}{4} = (n + m)^2 - 4nm \text{ بالضرب } \times 4$$

$$9 = (n + m)^2 - 4nm$$

$$9 = n^2 + 2nm + m^2 - 4nm$$

$$9 = n^2 - 2nm + m^2$$

$$9 - 49 = n^2 - 49$$

$$40 = n^2$$

$$\therefore n = 5$$

حل آخر

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \text{ ، } x = 9 \text{ ، } x = 2$$

$$\therefore n - m = \pm \frac{\sqrt{9^2 - 4 \cdot 14}}{2}$$

$$n - m = \frac{3}{2}$$

مثال ٥

إذا كانت n, m هما جذرا المعادلة :

$$x^2 - 11x + 3 = 0$$

فكزن المعادلة التي جذراها : n, m

الحل

$$x^2 - 11x + 3 = 0 \text{ ، } x = 11 \text{ ، } x = 3$$

\therefore جذري المعادلة العطا هما : n, m

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{11}{1}$$

$$\therefore n + m = 11$$

$$\therefore n + m = 11$$

$$\therefore n + m = 7 \text{ (١)}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{3}{1}$$

$$\therefore (n + m)(n - m) = 3$$

$$\therefore n + m = 3$$

$$\therefore n + m = 1 \text{ (٢)}$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore n + m = 7$$

$$\therefore n + m = 14$$

$$\therefore n + m = 15 \text{ (٣)}$$

\therefore المعادلة المطلوبة جذراها : n, m

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = n + m = 7$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = n - m = 15$$

\therefore المعادلة المطلوبة هي

$$x^2 - 7x + 15 = 0$$

$$x^2 - 7x + 15 = 0$$

$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} =$$

$$\frac{(m+n) \cdot \frac{1}{mn}}{\frac{1}{mn}} =$$

$$\frac{(1-)(3)}{(1-)} =$$

$$11 = 2 + 9 =$$

، حاصل ضرب الجذرين $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} =$

$$\frac{1}{(m+n)} =$$

$$1 = \frac{1}{(1-)} =$$

∴ المعادلة هي : $11 - 2 = 1 + 0$.

مثال ٨

كون المعادلة التربيعية التي يزيد كل من
جذريها بمقدار ١ عن جذري المعادلة
 $0 = 9 - 7x - x^2$

الحل

نفرض أن جذري المعادلة العطاها : l ، m

$$∴ l + m = 7 ، \quad l \cdot m = 9$$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما

$$l + 1 ، \quad m + 1$$

$$∴ \text{مجموع الجذرين} = l + m + 1 + 1 =$$

$$2 + m + l =$$

$$9 = 2 + 7 =$$

$$\frac{\sqrt{(9-)(-4) \times 2 \times (-4)}}{2} \pm = \frac{3}{2} ∴$$

بالضرب $\times 2$ للطرفين

$$\sqrt{(9-)(-4) \times 2 \times (-4)} \pm = 3 ∴$$

$$\sqrt{8-32-81} \pm = 3 ∴$$

$$\sqrt{8-49} \pm = 3 ∴ \text{بالتربيع للطرفين}$$

$$8-49=9 ∴$$

$$8-49=9 ∴$$

$$8=49 ∴$$

$$8=0 ∴$$

مثال ٧

إذا كان l ، m هما جذرا المعادلة

$$0 = 1 - 3x - x^2$$

كون المعادلة التي جذراها $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$

الحل

من المعادلة العطا : ∴

$$\frac{1}{m} = \text{مجموع الجذرين} =$$

$$∴ m + l = 3$$

$$\frac{1}{m} = \text{حاصل ضرب الجذرين} =$$

$$∴ l \cdot m = 1$$

∴ المعادلة المطلوبة جذراها : $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{l} = \text{مجموع الجذرين}$$

مثال ١٠

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة :

$$٤س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$

وكانت : $ل^٢ + م^٢ = ٣$ فاحسب قيمة $ل$

الحل

$\therefore ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة

$$\frac{٣-}{١} = ل + م ،$$

$$\therefore ل + م = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$ل = م = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore ل = م = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore ل^٢ + م^٢ = ٣$$

$$\therefore (ل + م)^٢ - ٢ل م = ٣$$

$$\therefore (ل + م)^٢ - ٢ل م = ٣$$

$$\frac{١}{٤} \times ٥ = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١٥}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore ١٥ = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٥} = ١$$

مثال ١١

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة :

$$٣س^٢ - ٦س + ١ = ٠$$

$$ل + م ، ل م$$

الحل

، حاصل ضرب الجذرين $(١ + ل) (١ + م) =$

$$١ + ل + م + ل م =$$

$$١ - = ١ + ٦ + (٩ -) =$$

\therefore المعادلة هي : $٣س^٢ - ٩س - ١ = ٠$

مثال ٩

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذري المعادلة

$$٣س^٢ - ٨س - ١ = ٠$$

وكانت $ل < م$ كون المعادلة التي جذراها $ل - ١$ ، $م + ٢$

الحل

نوجد جذري المعادلة العكسة :

$$٣س^٢ - ٨س - ١ = ٠$$

$$٠ = (٢ + س)(٤ - س)$$

$$٠ = ٢ + س \quad \text{أو} \quad ٠ = ٤ - س$$

$$\therefore س = -٢ \quad \text{أو} \quad س = ٤$$

$$\therefore ل < م$$

$$\therefore ل = -٢ ، م = ٤$$

\therefore المعادلة المطلوبة جذراها : $ل - ١$ ، $م + ٢$

\therefore مجموع الجذرين $ل - ١ + م + ٢ =$

$$= ل + م + ١$$

$$= ٢ - ٤ + ١ = -١$$

، حاصل ضرب الجذرين $(١ - ل) (١ + م) =$

$$= (١ - ل) (١ + م) = ١ + م - ل - ل م = ٣$$

\therefore المعادلة هي : $٣س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$

الحل

∴ ل، م هما جذرا المعادلة

$$\frac{ب}{م} = م + ل ∴ م + ل = ٢$$

$$ل م = ٦ ∴ \frac{ح}{م} = م + ل$$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + م ، ل م

$$∴ مجموع الجذرين = ل + م + ل م$$

$$= ٦ + ٢ = ٨$$

∴ حاصل ضرب الجذرين = (ل + م)(ل م)

$$= ٦ \times ٢ = ١٢$$

∴ المعادلة هي : $س^٢ - ٨س + ١٢ = ٠$

مثال ١٢

إذا كانت : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة

$$س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$$

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

$$∴ \frac{٢}{ل} ، \frac{٢}{م} هما جذرا المعادلة العطاة$$

$$∴ \frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م} = ٤$$

$$∴ \frac{٤}{ل م} = ٤ ∴ ل م = ١$$

$$٦ = \frac{٢}{م} + \frac{٢}{ل} ،$$

$$∴ ٦ = \frac{٢ل + ٢م}{ل م} ، ∴ ل م = ١$$

$$∴ ٦ = \frac{(ل + م)٢}{١} \text{ بالقسمة على ٢ للطرفين}$$

$$٣ = ل + م$$

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$∴ ل + م = ٣$$

$$ل م = ١$$

∴ المعادلة هي

$$س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$



إشارة الدالة

ملاحظات مهمة

(١) في الفترة التي يقع فيها منحنى الدالة أعلى محور السينات تكون الدالة موجبة في هذه الفترة

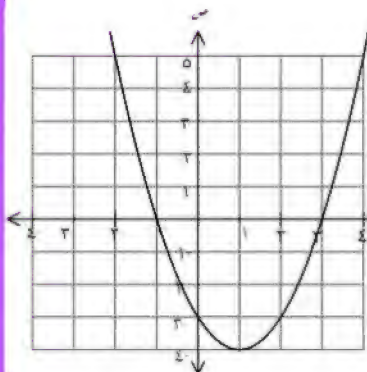
(٢) إذا كان : منحنى الدالة يقطع محور السينات في (٠، ٢) ، (٠، ٣) فإن :

$d(x) = 0$ عندما $x \in \{0, 2\}$

(٣) في الفترة التي يكون فيها منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات تكون الدالة سالبة في هذه الفترة

فمثلاً

في الشكل المقابل :



(١) منحنى الدالة

يقع فوق محور السينات في الفترة :

$[-\infty, 0] \cup [2, \infty]$

في الدالة موجبة في $[-\infty, 0] \cup [2, \infty]$

(٢) منحنى الدالة يقطع محور السينات في

$(0, 1)$ ، $(3, 0)$

$\therefore d(x) = 0$ عندما $x \in \{0, 3\}$

(٣) منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات

في الفترة : $[1, 3]$

\therefore الدالة تكون سالبة في الفترة $[1, 3]$

إذا كانت : $d(x) = 0$

فإنه يقصد بإشارة الدالة قيم x التي تجعل

(١) $d(x)$ موجبة

(٢) $d(x)$ سالبة

(٣) $d(x) = 0$ صفر

أولاً : إشارة الدالة الثابتة

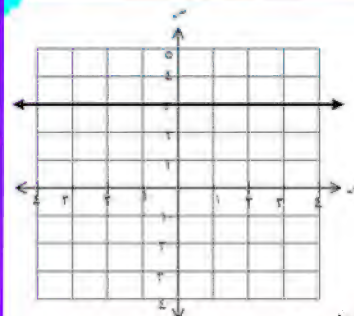
إذا كانت : $d(x) = a$ حيث $a \neq 0$ ، $a \in \mathbb{R}$

فإن إشارة الدالة هي نفس إشارة a لجميع قيم x الحقيقية

(١) إشارة الدالة : $d(x) = 5$ تكون في

(٢) إشارة الدالة : $d(x) = -2$ تكون في

(٣) الدالة : $d(x) = -x^2$ تكون في الفترة

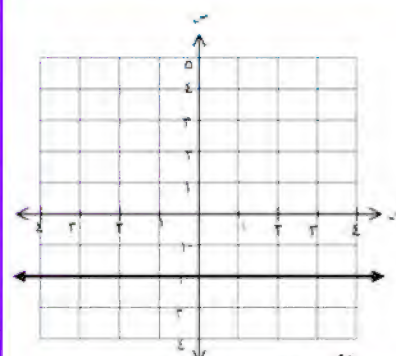


(٤) الشكل المقابل

يمثل الدالة :

$d(x) = \dots\dots\dots$

وإشارة الدالة تكون في \mathbb{R}



(٥) الشكل المقابل

يمثل الدالة :

$d(x) = \dots\dots\dots$

وإشارة الدالة تكون في \mathbb{R}

$$(1) \text{ د (س) } = 0 \text{ عندما س} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما س} \in \left[\frac{2}{3}, \infty \right)$$

$$(3) \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما س} \in \left(-\infty, \frac{2}{3} \right]$$

مثال ٣

عين إشارة الدالة د : د (س) = ٢ - ٦ س

الحل

$$\text{بوضع د (س) } = 0$$

$$\therefore 0 = 2 - 6س$$

$$\therefore 6 = 6س$$

$$\therefore 3 = س$$

$$(1) \text{ د (س) } = 0 \text{ عندما س} = 3$$

$$(2) \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما س} \in \left(-\infty, 3 \right]$$

$$(3) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما س} \in \left(3, \infty \right)$$

ثالثاً : إشارة الدالة التربيعية

ليجئ إشارة الدالة التربيعية د :

$$\text{د (س) } = ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$$

$$\text{نوجد المميز} = ٢٤ - ٢٢$$

ونوجد ثلاث حالات

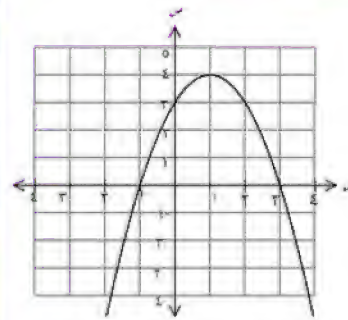
$$(1) \text{ إذا كان المميز } < 0$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

نوجد هذين الجذرين (بالتعليل - القانون

العام - بالحاسبة) وليكن :

مثال ١



الشكل المقابل
يمثل منحنى دالة

الكل ما يأتي

$$(1) \text{ د (س) } < 0 \text{ في } \dots\dots\dots$$

$$(2) \text{ د (س) } > 0 \text{ في } \dots\dots\dots$$

$$(3) \text{ د (س) } = 0 \text{ في الفترة } \dots\dots\dots$$

ثانياً : إشارة الدالة الخطية

$$\text{الدالة د : د (س) } = اس + ب$$

$$= (س + \frac{ب}{ا})$$

نكون

$$(1) \text{ د (س) } = 0 \text{ عندما س} = -\frac{ب}{ا}$$

$$(2) \text{ د (س) } < 0 \text{ لها نفس إشارة عندما س} < -\frac{ب}{ا}$$

$$(3) \text{ د (س) } > 0 \text{ تخالف إشارة عندما س} > -\frac{ب}{ا}$$

مثال ٢

$$\text{اجئ إشارة الدالة د : د (س) } = ٣س - ٢$$

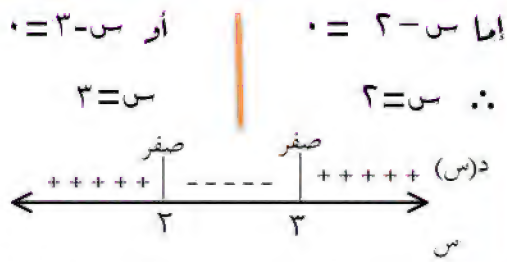
الحل

$$\text{بوضع د (س) } = 0$$

$$\therefore 0 = ٣س - ٢$$

$$\therefore ٢ = ٣س$$

$$\therefore س = \frac{٢}{٣}$$



(١) د (س) $s = 0$ عندما $s \in \{2, 3\}$

(٢) د (س) $s > 0$ عندما $s \in [2, 3]$

(٣) د (س) $s < 0$ عندما $s \in] - \infty, -2] \cup [3, +\infty[$

مثال ٥

اجمع إشارة الدالة د: د (س) $= 4 - 3s - s^2$

الحل

بوضع د (س) $= 0$

$\therefore 4 - 3s - s^2 = 0$

$\therefore 1 = p, -1 = b, 4 = c$

المميز $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 4 = -12$

$= (3 - 4) \times 4 - 4 \times (1 - 4) = 16 + 12 = 28 > 0$

\therefore للمعادلة جذران حقيقيات مختلفتان نوجد لها بالتعليل

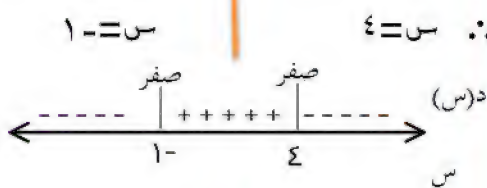
(لأن المميز مربع كامل)

$\therefore 4 - 3s - s^2 = 0$ بالضرب $\times (1 - 4)$ للطرفين

$\therefore 4 - 3s - s^2 = 0$

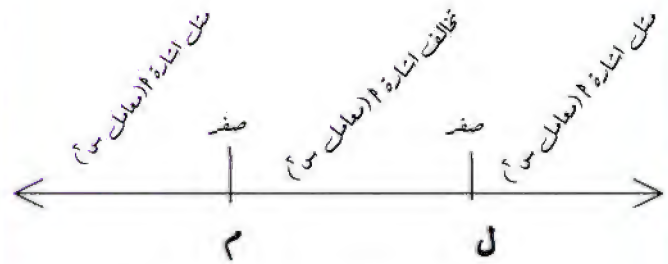
$\therefore 0 = (4 - s)(1 + s)$

أما $s = 4$ ، $s = -1$ أو $s = 1 + s$ ، $s = -1$



$s = 0$ ، $s = 2$ هما الجذران فإن

حيث $0 < 2$



(١) د (س) $s = 0$ عندما $s \in \{0, 2\}$

(٢) د (س) $s > 0$ عندما $s \in [0, 2]$

$s < 0$ عندما $s \in] - \infty, 0[\cup [2, +\infty[$

(٣) د (س) لها نفس إشارة

عندما $s \in [0, 2]$ ، $s \in [2, +\infty[$ ، $s \in] - \infty, 0[$

أي عندما $s \in] - \infty, 0[\cup [2, +\infty[$

مثال ٤

اجمع إشارة الدالة د: د (س) $= 5s^2 - 6s + 6$

الحل

بوضع د (س) $= 0$

$\therefore 5s^2 - 6s + 6 = 0$

$\therefore 1 = p, -6 = b, 6 = c$

المميز $\Delta = 36 - 4 \times 5 \times 6 = -44$

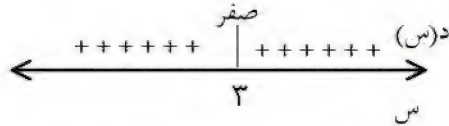
$= (5 - 6) \times 6 - 4 \times (1 - 6) = 24 - 20 = 4 > 0$

\therefore للمعادلة جذران حقيقيات مختلفتان نوجد لها بالتعليل

$\therefore 0 = (5 - s)(6 - s)$

$0 = 36 - 36 = 9 \times 1 \times 4 - 6 =$
 \therefore للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكل منهما

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times 9} = -\frac{1}{3} \quad \therefore \quad \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{3}$$



$$(1) \text{ د (س) = صفر عندما } 3 =$$

$$(2) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما } 3 \in -\{3\}$$

(3) إذا كان المميز $0 >$

\therefore ليس للمعادلة جذور حقيقية

والدالة تكون

لها نفس إشارة a لجميع قيم s الحقيقية

مثال ٧

$$9 + 3s - s^2 = 0 \text{ د (س) =}$$

الحل

$$0 = \text{بوضع د (س)}$$

$$\therefore 9 + 3s - s^2 = 0$$

$$\therefore 1 = a, \quad b = 3, \quad c = 9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = 9 - 36 = -27 < 0$$

$$= (-3) \times (-1) \times 4 - 9 = 36 - 36 = 0 >$$

ليس للمعادلة جذور حقيقية

\therefore الدالة لها نفس إشارة معامل s^2

لجميع قيم s الحقيقية

$$0 < a, \quad \therefore$$

$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } 0 <$$

$$(1) \text{ د (س) } = 0 \text{ عندما } \frac{-b}{2a}$$

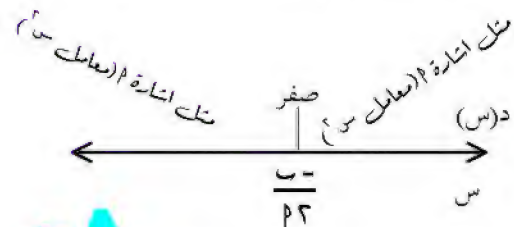
$$(2) \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما } 0 \in [-1, 4]$$

$$(3) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما } 0 \in -[4, -1]$$

(2) إذا كان المميز $0 =$

\therefore للمعادلة جذران حقيقيان

متساويان وكل منهما $\frac{-b}{2a}$



$$(1) \text{ د (س) = صفر عندما } \frac{-b}{2a} =$$

$$(2) \text{ د (س) لها نفس إشارة } a$$

$$\text{عندما } 0 \in -\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

مثال ٦

$$9 + 6s - s^2 = 0 \text{ د (س) =}$$

الحل

$$\text{بوضع د (س) } = 0$$

$$\therefore 9 + 6s - s^2 = 0$$

$$\therefore 1 = a, \quad b = 6, \quad c = 9$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$$

مثال ٩

إذا كانت :

$$د(س) = (س)^2 - ٦س + ٥ ، د(س) = (س)^2 - ٤س - ٣$$

فعين الفترات التي تكون فيها الدالتين

موجبيتين معا

الحل

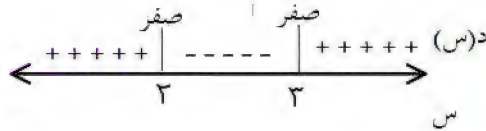
نبحث إشارة الدالة د :

$$د(س) = (س)^2 - ٦س + ٥ = ٠$$

$$٠ = (س - ٣)(س - ٥)$$

$$٠ = س - ٣ \quad \text{أو} \quad ٠ = س - ٥$$

$$٣ = س \quad \text{أو} \quad ٥ = س$$



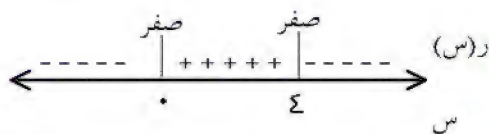
نبحث إشارة الدالة د

$$د(س) = (س)^2 - ٤س - ٣ = ٠$$

$$٠ = (س - ٤)(س + ٣)$$

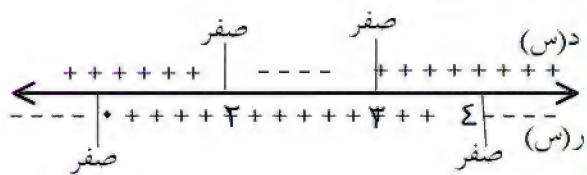
$$٠ = س - ٤ \quad \text{أو} \quad ٠ = س + ٣$$

$$٤ = س \quad \text{أو} \quad -٣ = س$$



يبحث إشارة الدالتين على خط أعداد واحد

كما بالسكّل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معا في :

$$[٣ ، ٤]$$

مثال ٨

ابحث إشارة الدالة د :

$$د(س) = (س)^2 - ٨س + ١٥$$



الحل

نضع : د(س) = ٠

$$٠ = (س)^2 - ٨س + ١٥$$

$$٠ = (س - ٥)(س - ٣)$$

$$٠ = س - ٥ \quad \text{أو} \quad ٠ = س - ٣$$

$$٥ = س \quad \text{أو} \quad ٣ = س$$

$$٥ < س < ٣$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

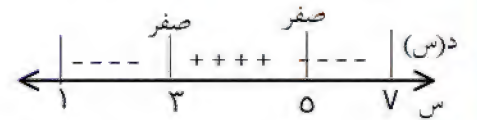
$$٠ = (س)^2 - ٨س + ١٥$$

$$٠ = (س - ٥)(س - ٣)$$

$$٠ = س - ٥ \quad \text{أو} \quad ٠ = س - ٣$$

$$٥ = س \quad \text{أو} \quad ٣ = س$$

$$٥ < س < ٣$$



$$(١) د(س) = ٠ \quad \text{عندما} \quad س \in \{٣، ٥\}$$

$$(٢) د(س) > ٠$$

$$\text{عندما} \quad س \in [٣، ٥]$$

$$(٣) د(س) < ٠ \quad \text{عندما} \quad س \in]٥، ٣[$$

حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد في ح



$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 1 , 4 [$$

$$\therefore \text{م. ح} =] 1 , 4 [$$

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$$\text{س}^2 \leq 9 - 6\text{س}$$

الحل

$$\therefore \text{س}^2 - 6\text{س} + 9 \leq 0$$

$$\text{بوضع د (س) = س}^2 - 6\text{س} + 9$$

$$\therefore \text{س} = 1, \text{س} = 6, \text{س} = 9$$

$$\therefore \text{الميز = س}^2 - 6\text{س} + 9$$

$$= (6 - \text{س})^2 = 36 - 12\text{س} + 9 = 45 - 12\text{س}$$

$$\therefore \text{للمعادلة د (س) = 0 جذران متساويان}$$

$$\text{دلك منهما : س} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{س} = \frac{6}{1 \times 1} = 6$$

$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 3 , 6 [$$

$$\text{د (س) } = 0 \text{ عندما } \text{س} = 3$$

$$\therefore \text{د (س) } \leq 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 3 , 6 [$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل = ح}$$



$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

(١) نجعل أحد طرفي المتباينة = صفر

(٢) نوجد الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

$$\text{وهي د (س) = س}^2 + \text{س} + 1$$

(٣) نبصت إشارة هذه الدالة

(٤) نوجد قيم س التي تجعل القدر :

$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$$\text{س}^2 + 4 < 0$$

الحل

١- بوضع المتباينة

$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

$$\therefore \text{س}^2 - 5\text{س} + 4 < 0$$

٢- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي

$$\text{د (س) = س}^2 - 5\text{س} + 4$$

٣- نبصت إشارة هذه الدالة

بوضع :

$$\text{س}^2 - 5\text{س} + 4 = 0$$

$$(4 - \text{س})(1 - \text{س}) = 0$$

$$\text{إما س} = 4 \quad \text{أو س} = 1$$

$$\text{س} = 1$$

$$\therefore \text{س} = 4$$

مثال ٣

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

$$(3+s)^2 - 10 \leq (3+s)^3$$

الحل

$$s^2 + 6s + 9 - 10 \leq s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

$$s^2 + 6s - 1 \leq s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

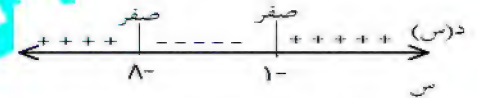
$$\therefore s^3 + 8s^2 + 21s + 28 \geq 0$$

$$\text{بوضع د(س) = } s^3 + 8s^2 + 21s + 28$$

$$= (s+1)(s+8)$$

$$\therefore \text{هذه المعادلة د(س) = 0}$$

$$\text{هما } s = -1, \quad s = -8$$

المقدار $(s^2 + 6s + 9 - 10)$ يكون أكبر من الصفر

$$s \in (-\infty, -8) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{والمقدار = صفر عندما } s \in \{-1, -8\}$$

$$\therefore \text{م.ح} = (-\infty, -8) \cup \{-1, -8\} \cup (-1, \infty)$$

$$= (-\infty, -8] \cup [-1, \infty)$$

سلسلة الفاروق

فى

حساب المثلثات

للمصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد : أ/عشري فاروق

ت/١١٥٦٣٤٤٤٣١

الزاوية الموجهة

حساب مثلثات

القياس الموجب والقياس السالب
للزاوية الموجهة

يرسم داخل الزاوية الموجهة سهم يشير
من الضلع الابتدائي الى الضلع النهائي

:

أ إذا كان اتجاه السهم في اتجاه دوران
عقارب الساعة كان قياسها سالبا



ب إذا كان السهم في اتجاه عكس اتجاه
دوران عقارب الساعة كان قياسها موجبا



الشكل المقابل

يمثل: $\angle AOB$ الموجهة
وهي زاوية قياسها
موجب

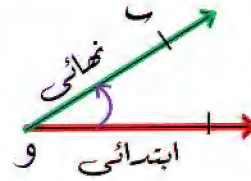
الشكل المقابل

يمثل: $\angle AOB$ الموجهة
وهي زاوية قياسها
موجب

الزاوية الموجهة:

هي زوج مرتب من شعاعين لهما نفس
نقطة البداية ويسمى السقط الأول الضلع
الابتدائي ويسمى السقط الثاني الضلع
النهائي

الشكل المقابل

يمثل: $\angle AOB$ الموجهة

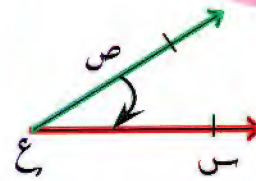
ويمكن التعبير عنها كزوج مرتب:

 (\vec{OA}, \vec{OB})

ويسمى:

الضلع: \vec{OA} الضلع الابتدائي
والضلع: \vec{OB} الضلع النهائي

مثال ١



في الشكل المقابل:

أكمل ما يأتي:

١ الشكل يمثل: \angle الموجهة

٢ يعبر عن هذه الزاوية بالزوج المرتب:

 (\dots, \dots)

٣ الضلع الابتدائي هو

٤ الضلع النهائي هو

الحل

١

القياس الموجب للزاوية التي قياسها

$$^{\circ}360 + ^{\circ}60 - = (^{\circ}60 -)$$

$$^{\circ}300 =$$

٢

القياس السالب للزاوية الموجبة التي

$$^{\circ}360 - ^{\circ}120 = (^{\circ}120)$$

$$^{\circ}240 - =$$

٣

القياس الموجب للزاوية التي قياسها

$$^{\circ}360 + ^{\circ}300 - = (^{\circ}300 -)$$

$$^{\circ}60 =$$

٤

القياس السالب للزاوية الموجبة التي

$$^{\circ}360 - ^{\circ}105 = (^{\circ}105)$$

$$^{\circ}255 - =$$

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل من
الأمثلة التالية

∴ للزاوية الموجبة قياسان أحدهما موجب

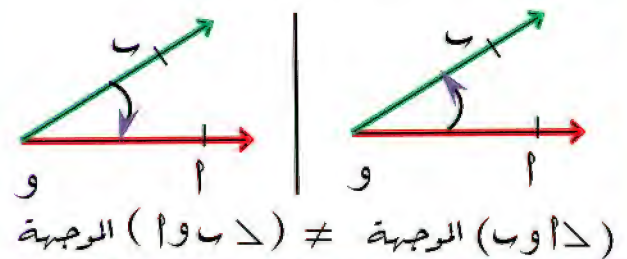
والآخر سالب ويكون

القياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = $^{\circ}360$ الزاوية التي قياسها الموجب = $^{\circ}150$ يكون قياسها السالب = $^{\circ}360 - ^{\circ}150$

$$^{\circ}210 - =$$

الزاوية التي قياسها السالب = $^{\circ}72 -$ يكون قياسها الموجب = $^{\circ}360 + ^{\circ}72 -$

$$^{\circ}288 =$$

الزاوية التي قياسها الموجب = θ يكون قياسها السالب = $^{\circ}360 - \theta$ الزاوية التي قياسها السالب = $\theta -$ يكون قياسها الموجب = $^{\circ}360 + \theta -$ (أ و ب) الزاوية \neq (أ و ب) الزاوية

مثال ٢

أوجد القياس الآخر للزاوية الموجبة التي
قياساتها كالتالي

$$^{\circ}120$$

٢

$$^{\circ}60 -$$

١

$$^{\circ}105$$

٤

$$^{\circ}300 -$$

٣

الحل

١

∴ اتجاه السهم في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ θ قياسها موجباً

$$\theta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

ب

اتجاه السهم في اتجاه دوران عقارب الساعة

θ قياسها سالباً

$$\theta = -(360^\circ - 40^\circ) = -320^\circ$$

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة مرسومة في الوضع القياسي إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

- ١ رأسها نقطة الأصل (د)
- ٢ ضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات في الوضع القياسي

الشكل المقابل : يمثل $\angle \alpha$ الوجهية

- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الابتدائي هو \overrightarrow{OA} ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

- ضلعها النهائي هو \overrightarrow{OB}

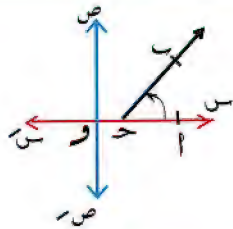
- السهم المرسوم بداخلها في عكس

اتجاه دوران الساعة

∴ قياسها موجب

مثال ٤

أى من الزوايا الموجهة الآتية في وضعها القياسي



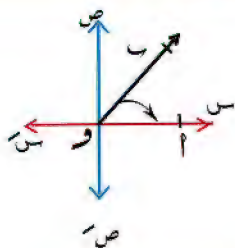
١

الحل

د أ ب الوجهية

ليست في الوضع القياسي

لأن رأسها لا تقع على نقطة الأصل



٢

الحل

د أ ب الوجهية ليست في الوضع القياسي

لأن ضلعها الابتدائي لا ينطبق على

الجزء الموجب لمحور السينات

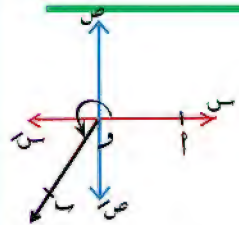


٢) تقع في الربع الثاني

إذا كانت :

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{Ox} و \vec{Oy} ، و \vec{OA}

■ $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ، 180°

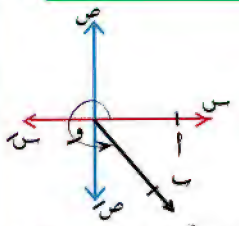


٣) تقع في الربع الثالث

إذا كانت :

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{Oy} و \vec{Ox} ، و \vec{OA}

■ $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$



٤) تقع في الربع الرابع

إذا كانت :

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{Ox} و \vec{Oy} ، و \vec{OA}

■ $270^\circ < \theta \leq 360^\circ$

٥) إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة

على أحد محاور الإحداثيات سميت

زاوية ربعية

∴ الزوايا الموجهة : $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

، $360^\circ, 450^\circ, \dots$ هي زوايا ربعية

مثال ٥

عين الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة

المرسومة في الوضع القياسي التي

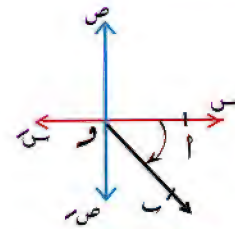
قياساتها كالتالي

١) 40°

الحل

∴ $0^\circ < 40^\circ \leq 90^\circ$

∴ تقع في الربع الأول



٣

الحل

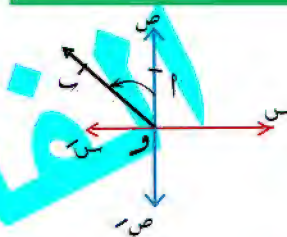
(أ و ب) الموجهة

في الوضع القياسي لأن :

- رأسها نقطة الأصل (و)

- ضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب

لمحور السينات



٤

الحل

(أ و ب) الموجهة

ليست في الوضع القياسي

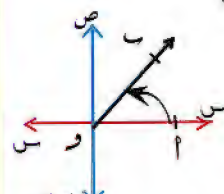
لأن ضلعها الابتدائي \vec{OA} لا ينطبق على

الجزء الموجب لمحور السينات

موقع الزاوية الموجهة

إذا كانت : (أ و ب) الموجهة في الوضع

القياسي وقياسها θ فإنها :



١) تقع في الربع الأول

إذا كانت :

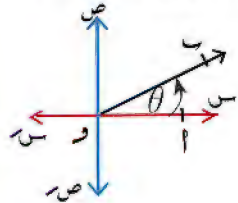
■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{Ox} و \vec{Oy} ، و \vec{OA}

■ $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$

على الجزء السالب لمحور السينات
 $\therefore -180^\circ$ هي زاوية ربعية

الزوايا المتكافئة

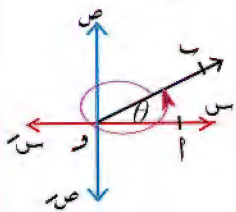
يقال لعدة زوايا في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان الضلع النهائي لهم جميعا واحد



الشكل المقابل

يمثل زاوية قياسها θ

عند دوران الضلع النهائي للزاوية وهو \leftarrow دورة كاملة حول نقطة الأصل فإنه يعود الى وضعه الأصلي



\therefore الزاويتان :

$$\theta, \quad 360 \times 1 + \theta$$

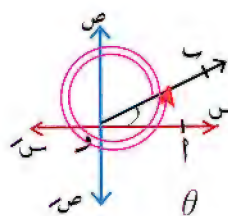
متكافئتان

وكذلك عند دوران الضلع النهائي

\leftarrow دورتين حول نقطة الأصل فإنه ينطبق على الضلع النهائي

للزاوية التي قياسها

\therefore الزاويتان :



$$\theta, \quad 360 \times 2 + \theta$$

متكافئتان

وهكذا

\therefore الزاويتان $\theta, \quad 360 \times n \pm \theta$

حيث $n \in \mathbb{Z}$

متكافئتان

٥٠ - ٢

الحل

$$\text{القياس الموجب للزاوية} = 50 - 360 = -310^\circ$$

$$-310^\circ \equiv 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$$

\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

أو

ترسم من الجزء الموجب لمحور السينات في اتجاه دوران عقارب الساعة

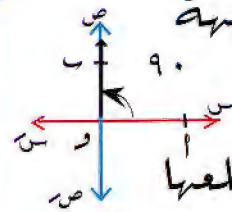


\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

٩٠ - ٣

الحل

\therefore عند رسم الزاوية الموجهة



التي قياسها 90°

في الوضع القياسي فإن ضلعها النهائي يقع على الجزء الموجب لمحور الصادات

\therefore الزاوية التي قياسها 90° هي زاوية ربعية

١٨٠ - ٤

الحل

الزاوية الموجهة التي قياسها -180° في

الوضع القياسي فإن ضلعها النهائي يقع

$$\text{القياس الموجب} = 50^\circ + 360^\circ = 410^\circ$$

$$\text{القياس السالب} = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad 120^\circ -$$

الحل

$$\text{القياس الموجب} = 120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$$

$$\text{القياس السالب} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\textcircled{3} \quad 3456^\circ$$

الحل

نوجد عدد الدورات الكاملة

$$3456 : 360 \approx 9,6$$

$$\therefore 9 = n$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$$= 3456 - 360 \times 9 = 216^\circ$$

الزاوية المكافئة السالبة قياسها

$$= 360 - 3456 = -3096^\circ$$

$$= -144^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad 3456^\circ -$$

الحل

عدد الدورات الكاملة

$$3456 : 360 \approx 9,6$$

$$\therefore 9 = n$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

اصغر قياس موجب و أكبر قياس سالب

■ لإيجاد أصغر قياس موجب مكافئ

للزاوية التي قياسها 1678°

نكتب الزاوية

$$1678^\circ = 360^\circ \times n + \theta$$

نوجد :

$$n = 1678 : 360$$

$$\approx 4,66111$$

حيث n عدد الدورات الكاملة

$$\therefore n = 4$$

$$\textcircled{1} \quad \theta = \text{الزاوية العطا} - 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 1678^\circ - 360^\circ \times 4$$

$$= 238^\circ$$

■ لإيجاد أكبر قياس سالب مكافئ للزاوية

التي قياسها 1678°

أكبر قياس سالب

$$= 360^\circ \times (1 + n) - 1678^\circ$$

$$= 360^\circ \times 5 - 1678^\circ = 122^\circ$$

مثال ٦

أوجد زاويتين احدهما بقياس موجب

والأخرى بقياس سالب مكافئ للزاوية

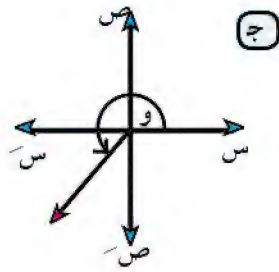
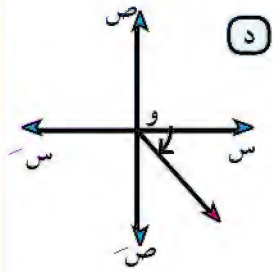
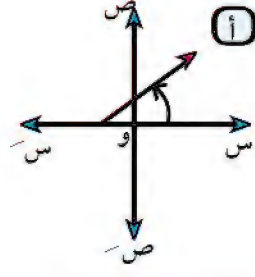
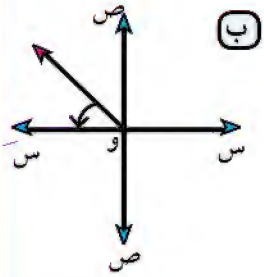
الموجبة التي قياسها كالتالي :

$$\textcircled{1} \quad 50^\circ$$

الحل

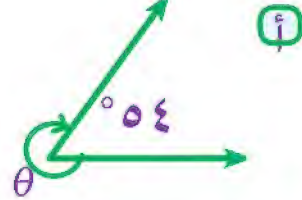
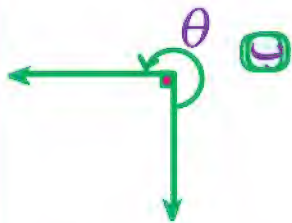
مثال ٨

أى من الزوايا الآتية تكون في الوضع القياسي



مثال ٩

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل مما يأتي



$$-3456^\circ = -360^\circ \times 9 + 144^\circ$$

$$-3456^\circ = -360^\circ \times 10 + 144^\circ$$

مثال ٧

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجبة الذي قياساتها كالتالي

$$-2196^\circ \quad (1)$$

الحل

$$-2196^\circ \div 360^\circ \approx -6,1$$

$$\therefore n = -6$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$$-2196^\circ = -360^\circ \times 6 + 324^\circ$$

$$324^\circ \in [0^\circ, 360^\circ)$$

\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

$$1615^\circ \quad (2)$$

الحل

$$1615^\circ \div 360^\circ \approx 4,49$$

$$\therefore n = 4$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$$1615^\circ = 360^\circ \times 4 - 175^\circ$$

$$-175^\circ \in [-90^\circ, 0^\circ)$$

مثال ١١

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالي

$$١) ٧٥٠^\circ$$

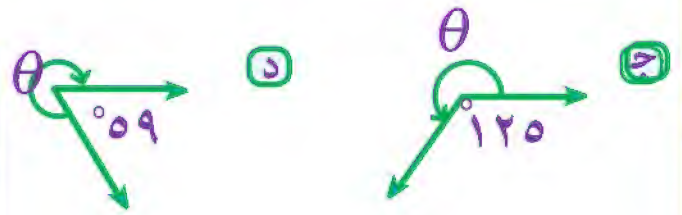
$$٢) -١٥٢٠^\circ$$

$$٣) -٢٧٠^\circ$$

مثال ١٢

عين أصغر قياس موجب للزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالي

$$١) -٣٠٠^\circ$$



مثال ١٠

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب
والأخرى بقياس سالب متكافئة للزاوية
الموجهة التي قياساتها كالتالي

$$١) ١٧٠^\circ$$

$$٢) -٣٩٥١^\circ$$

$$٣) ١٢٠٠^\circ$$

$$② \quad 1237^\circ$$

$$③ \quad 5908^\circ$$

مثال ١٣

عين أكبر قياس سالب للزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالي

$$① \quad 2367^\circ$$

$$② \quad 2567^\circ$$

$$③ \quad 4987^\circ$$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

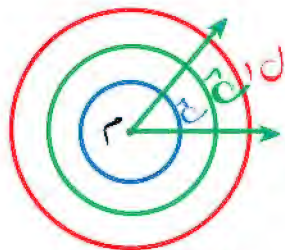
- ① الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها
 (أ) 120° (ب) 240° (ج) 300° (د) 420°
- ② الزاوية التي قياسها 85° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها
 (أ) 45° (ب) 135° (ج) 225° (د) 315°
- ③ الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها 167° هو
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ④ الزاوية التي قياسها (-135°) تقع في الربع
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ⑤ الزاوية التي قياسها (-850°) تقع في الربع
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ⑥ جميع الزوايا التي قياساتها كالاتي تقع في الربع الثاني ماعدا
 (أ) 240° (ب) 100° (ج) 120° (د) 860°
- ⑦ جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية 75° في الوضع القياسي ماعدا
 (أ) 285° (ب) 645° (ج) 285° (د) 435°

فوق

القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية الموجهة

الدرس الثاني

ثانياً: القياس الدائري للزاوية



في الشكل المقابل:

عند قسمة طول أي
قوس على نصف

القطر الناظر له في نفس الدائرة تنتج

(θ) القياس الدائري للزاوية

$$\frac{30}{20} = \frac{20}{20} = \frac{10}{10} = \theta$$

القياس الدائري

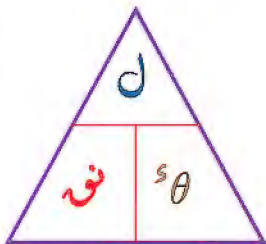
القياس الدائري للزاوية مركزية تحصر

بين ضلعيها قوساً طوله 'ل' في دائرة

طول نصف قطرها يساوي 'ن'

هو النسبة بين طول القوس إلى

طول نصف القطر



$$\frac{ل}{ن} = \theta$$

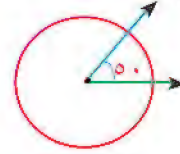
أولاً: القياس الستيني

تعتمد فكرة هذا القياس على تقسيم

الدائرة إلى 360 قوساً متساوية وكل

زاوية مركزية تقابل قوساً من هذه

الأقواس يكون قياسها 1°



الزاوية التي قياسها 50°

تقابل 50 قوساً من هذه الأقواس

وفي هذا القياس تقدر فيه الزاوية

بالدرجات والدقائق والثواني

وتنقسم الدرجة إلى 60 جزء وكل جزء

يسمى دقيقة :

$$1^\circ = 60'$$

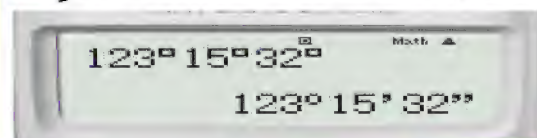
وتنقسم الدقيقة إلى 60 جزء كل جزء

كل جزء منها يسمى ثانية

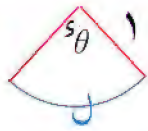
$$1' = 60''$$

$$123^\circ 15' 32''$$

ونقرأ 123 درجة و 15 دقيقة و 32 ثانية



مثال ١



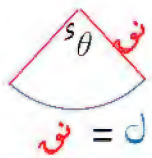
∴ في دائرة الوحدة يكون القياس

الدائري للزاوية المركزية =
طول القوس المحصور بين ضلعيها

الزاوية النصف قطرية (الراديان)

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر بين
ضلعيها قوساً طوله يساوي طول

نصف قطر الدائرة



$$l = \theta$$

$$\therefore \theta = \frac{l}{1} = l$$

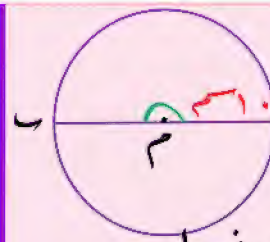
∴ قياس الزاوية النصف قطرية = 1

∴ الزاوية النصف قطرية هي وحدة
قياس القياس الدائري

مثال ٢

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوس
في دائرة طوله يساوي ثلاثة أمثال

طول نصف قطر دائرتها =^s



في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف

قطرها ١٠ سم، \overline{MP} قطر فيها
أوجد:

١) ($\angle M$) المركزية بالراديان

الحل

∴ طول القوس \widehat{MP}

= نصف طول محيط الدائرة

طول القوس $\widehat{MP} = \pi$

، $\theta = 10$ سم

$$\therefore l = \pi \cdot 10$$

$$\therefore \frac{l}{\theta} = \frac{\pi \cdot 10}{10} = \pi$$

$$\pi = \frac{\pi \cdot 10}{10} = \theta$$

من المثال السابق نجد أن الزاوية

الزاوية المركزية التي قياسها 180°

قياسها الدائري هو π

ملحوظة

في دائرة الوحدة يكون طول نصف

قطرها وحدة الأطوال

أي: $\theta = 1$ ∴ $\frac{l}{\theta} = l$

مثال ٣

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2 \times \pi \times 10 = 20\pi \text{ سم}$$

مثال ٥

زاوية مركزية قياسها $1,5^\circ$ في دائرة
طول نصف قطرها ١٠ سم
أوجد طول قوسها

الحل

$$\therefore \theta^\circ \times \pi = \text{نق} \\ \text{نق} = 10 = \theta^\circ, \quad 1,5^\circ = \theta^\circ \\ \therefore \text{نق} = 10 \times 1,5 = 15 \text{ سم}$$

مثال ٦

زاوية مركزية قياسها $1,2^\circ$ في دائرة
مساحتها 25π سم^٢
احسب
طول القوس المحصور بين ضلعيها

الحل

$$\therefore \theta^\circ = 1,2^\circ \\ \therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi \times \text{نق}^2 \\ \therefore 25\pi = \pi \times \text{نق}^2 \\ \therefore 25 = \text{نق}^2 \quad \therefore \text{نق} = 5 \\ \therefore \theta^\circ \times \pi = \text{نق} \quad \therefore 1,2^\circ \times \pi = 6 \text{ سم}$$

زاوية مركزية في دائرة طول نصف

قطر دائرتها ١٥ سم وتحتصر بين
ضلعيها قوساً طوله ٢٥ سم
احسب قياسها الدائري

الحل

$$\therefore \text{نق} = 25 \text{ سم}, \quad \text{نق} = 15 \text{ سم}$$

$$\therefore \theta^\circ = \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

$$\therefore \theta^\circ = \frac{25}{15}$$

$$= 1,667^\circ$$

مثال ٤

زاوية مركزية قياسها $1,2^\circ$ في دائرة
وتحتصر بين ضلعيها قوساً طوله ١٢ سم
احسب محيط دائرتها

الحل

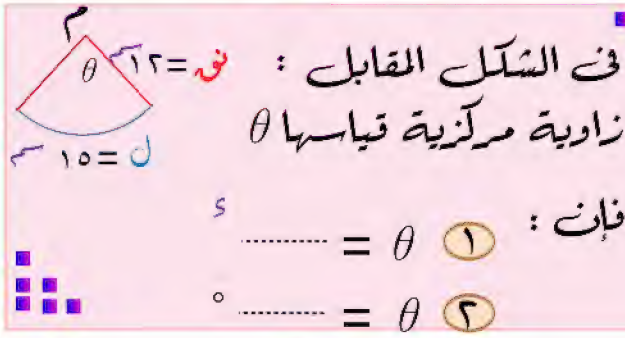
$$\therefore \theta^\circ = 1,2^\circ, \quad \text{نق} = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{\text{نق}}{\theta^\circ}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{12}{1,2} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \times \text{نق}$$

مثال ١



الحل

$$\therefore \text{نق} = 12 \text{ سم} , \text{ل} = 15 \text{ سم}$$

$$\frac{l}{r} = \theta^\circ$$

$$\therefore \frac{15}{12} = \theta^\circ$$

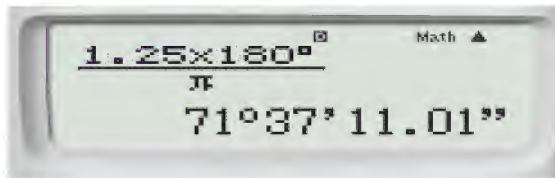
$$= 1.25^\circ$$

بالتحويل إلى القياس الستيني

$$\frac{1.25 \times 180}{\pi} = \theta^\circ$$

$$\frac{180 \times 1.25}{\pi} = \theta^\circ$$

$$= 71.37^\circ \approx 71^\circ$$



العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري

يوجد للزاوية وحدتي قياس هما

والقياس الستيني (°)

القياس الدائري (θ°)

ويمكن التحويل بينهما



سبب أن تناولنا علاقة

$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية

$$\therefore \frac{l}{\pi r} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \quad \text{بالتضرب } \times 2 \text{ للطرفين}$$

$$\frac{l}{\pi r} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

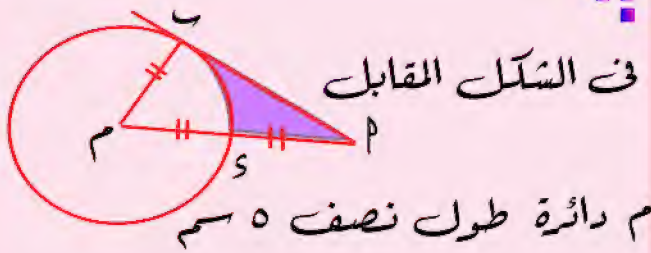
$$\boxed{\frac{\theta^\circ}{\pi} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}}$$

$$\frac{\text{القياس الستيني}}{180^\circ} = \frac{\text{القياس الدائري}}{\pi}$$

$$\therefore \text{القياس الستيني} = 180^\circ \times \frac{\text{القياس الدائري}}{\pi}$$

$$\text{القياس الدائري} = \frac{\pi \times \text{القياس الستيني}}{180^\circ}$$

مثال ٣



في الشكل المقابل
م دائرة طول نصف ٥ سم
رسم \overline{PM} مماس للدائرة عند ب
م تقطع الدائرة في س بحيث $PM = PS$
احسب محيط الشكل المظلل

الحل

$$\because PM = PS = MS = MB = 5 \text{ سم}$$

$$\because MB = 10$$

$\because \overline{PM}$ مماس للدائرة عند ب

$$\angle B = 60^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{PM}{MB} = \frac{PS}{MB}$$

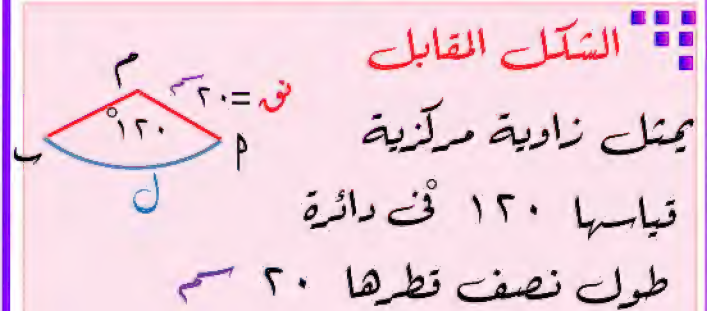
$$\therefore \angle PMS = 120^\circ$$

$$\therefore \text{طول } \overline{PS} = \theta \times \frac{5}{180}$$

$$\therefore \text{طول } \overline{PS} = \frac{5 \times 120}{180}$$

$$= \frac{5}{3} \pi \text{ سم}$$

مثال ٢



احسب طول القوس المقابل لها

الحل

نوجد القياس الدائري للزاوية المركزية

$$\therefore \theta = \frac{\pi \times 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

نضغط على الفتح
فنحصل على النتيجة

$$\theta \approx 2.094$$

$$\therefore \theta \times 20 = \text{طول}$$

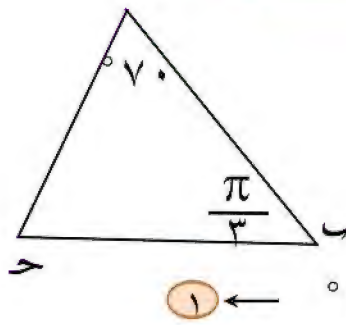
$$\therefore 20 \times 2.094 = \text{طول}$$

$$\approx 41.88$$



www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الحل

في Δ ب ح

نفرض أن

$$70^\circ = (\angle) \text{ ب } \leftarrow 1$$

$$\frac{\pi}{3} = (\angle) \text{ ح } ,$$

نوجد القياس الستيني للزاوية ب

$$60^\circ = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = (\angle) \text{ ح } \leftarrow 2$$

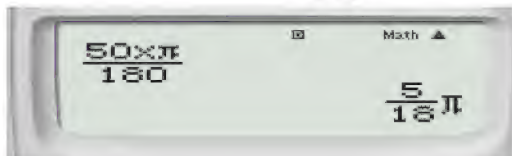
مجموع قياسات الزوايا الثلاث الداخلة

$$180^\circ =$$

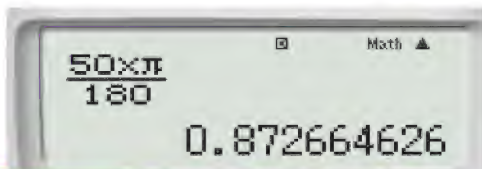
$$(70^\circ + 60^\circ) - 180^\circ = (\angle) \text{ ح } =$$

$$50^\circ =$$

$$\frac{\pi \times 50^\circ}{180^\circ} = (\angle) \text{ ح } \therefore \frac{\pi}{18} \cdot 50$$



$$0.872664626 = (\angle) \text{ ح } \therefore$$


 $\therefore \Delta$ ب ح قائم الزاوية في ب

من نظرية فيثاغورث

$$\sqrt{b^2 + c^2} = a \therefore$$

$$\sqrt{(5)^2 + (10)^2} =$$

$$\sqrt{25 + 100} =$$

$$\sqrt{125} = 11.18 \approx$$

 \therefore محيط الشكل الظل

$$a + b + c =$$

$$\frac{\pi}{3} + 5 + 11.18 =$$

$$\left(\frac{\pi}{3} + 1 + 11.18 \right) \approx 18.89 \text{ سم}$$

مثال ٤

ثلاث قياسات أخرى زوايا 70 وقياس

زاوية أخرى منه $\frac{\pi}{3}$

أوجد :

القياس الستيني والقياس الدائري

للزاوية الثالثة



www.Cryp2Day.com

موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ٦

ΔABC فيه :

$$\angle A = 120^\circ, \angle B = 40^\circ, \angle C = 20^\circ$$

أوجد القياس الستيني و الدائري

لزواية C

الحل

نفرض أن :

$$\angle A = 120^\circ, \angle B = 40^\circ, \angle C = 20^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 2 \times 60^\circ$$

$$\angle B = 40^\circ \Rightarrow \angle B = 2 \times 20^\circ$$

$$\angle C = 20^\circ \Rightarrow \angle C = 2 \times 10^\circ$$

$$\angle A = 120^\circ, \angle B = 40^\circ, \angle C = 20^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية $= 180^\circ$

$$180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C$$

$$180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C$$

$$180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C$$

$$180^\circ = 60^\circ$$

$$30^\circ = \angle C$$

$$\angle C = 30^\circ$$

$$90^\circ = 30^\circ \times 3 = \angle A$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi \times 90}{180} = \angle A$$

ملحوظة

الزاوية التي قياسها 180° قياسها الدائري

يساوي π

∴ إذا كانت الزاوية الوجهة بدلالة π

لتحويلها إلى قياس ستيني مباشرة

بدون تطبيق القانون نحول π

إلى 180°

مثال ٥

أوجد القياس الستيني للزاوية الوجهة

التي قياساتها كالتالي

$$\frac{\pi}{3}$$

الحل

$$\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = \text{القياس الستيني}$$

$$30^\circ = \frac{180^\circ \times 1}{3} =$$

$$0,75$$

الحل

$$\frac{180^\circ \times 0,75}{\pi} = \text{القياس الستيني}$$

$$31^\circ = 39^\circ = 32^\circ$$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{9}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٤) إذا كان القياس الستيني لزاوية $١٢^\circ ٤٣'$ فإن قياسها الدائري =
- (أ) $٠,٢٤$ (ب) $\pi ٠,٢٤$ (ج) $٠,٢٨$ (د) $\pi ٠,٢٨$
- ٥) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى
- (أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٤٨٠°
- ٦) طول القوس في دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى
- (أ) $\pi ٥$ (ب) $\pi ٤$ (ج) $\pi ٣$ (د) $\pi ٢$
- ٧) القوس الذي طوله $\pi ٥$ سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى
- (أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°
- ٨) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{3}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوى
- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{١٢}$
- ٩) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى $١٨٠ \times (٢ - n)$ حيث n عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية الشكل الخماسي المنتظم بالقياس الدائري يساوى
- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{\pi}{٥}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$
- ١٠) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي بالتقدير الدائري يساوى
- (أ) $\pi ٢$ (ب) π (ج) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\pi ٣$
- ١١) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري يساوى
- (أ) $\frac{1}{4}$ طول قوسها. (ب) $\frac{1}{٢}$ طول قوسها. (ج) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.
- ١٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{\pi}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس قياسها الستيني
- (أ) ٣٠° (ب) $٦٧^\circ ٣٠'$ (ج) ١٣٥° (د) ٤٣° تقريباً.



٢ أوجد بدلالة π القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

① 135° | ② 90° | ③ 300° | ④ 235°

⑤ 210° | ⑥ 112.4° | ⑦ 39° | ⑧ 78°

٣ أوجد القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها الستينية كالآتي مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

① 58° | ② 56.6° | ③ 37.6°

④ 115.489° | ⑤ 257.54° | ⑥ 16.5048°

٤ أوجد القياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني) لكل من الزوايا التي قياساتها الدائرية كالآتي :

① $\pi \frac{11}{15}$ | ② $\pi 0.72$ | ③ 0.49

④ 1.67 | ⑤ 2.27 | ⑥ $3\frac{1}{4}$

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) في كل من الحالات الآتية :

① $\theta = \frac{9}{8}\pi$ ، $l = 22.5$ سم | ② $\theta = 0.767$ ، $l = 38.35$ سم

③ $\theta = 139^\circ$ ، $l = 24.325$ سم | ④ $\theta = 78.4646^\circ$ ، $l = 43.92$ سم



٧ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

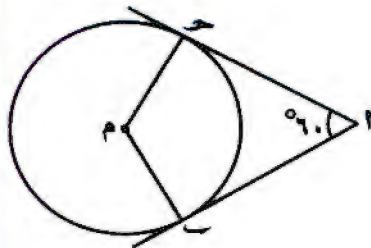
① نق = ١٢,٥ سم ، $\theta = ١,٦^\circ$	② نق = ٧,٥ سم ، $\theta = ٦٧,٤^\circ$
③ نق = ٢٠ سم ، $\theta = ٢,٤٣^\circ$	④ نق = ١٥ سم ، $\theta = ١٠,٤٥٨٩^\circ$

٨ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

٩ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}^\circ$ وقياس زاوية أخرى منه $\frac{٤}{٩}^\circ$ وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥° أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. ($\frac{٢٢}{٧} = \pi$)



١٠ فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم^٢ فأوجد محيط الشكل المظلل تقريبًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

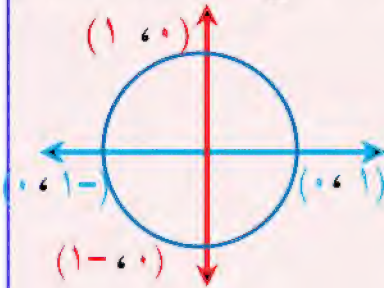


١١ فى الشكل المقابل : \overline{AP} ، \overline{BP} مماسان للدائرة م ، $\angle P = ٦٠^\circ$ ، $\overline{AP} = ١٢$ سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر \widehat{AD}

الدوال المثلثية

ملاحظات مهمة

١ دائرة الوحدة تقطع محاور الإحداثيات



في النقط

(0, 1)

(1, 0)

(0, -1)

(1, -0)

∴

فإن:

$$\sin \in [-1, 1]$$

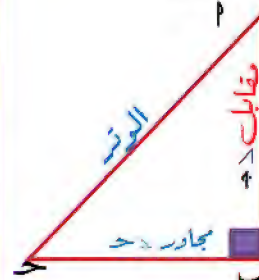
$$\cos \in [-1, 1]$$

٢ لأي نقطة (س، ص) تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها

$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

تذكر أن:

إذا كان: Δ α ح قائم الزاوية في Δ فإن كلًا من α ، α حادتين

فإن الدوال المثلثية للزاوية ح هي

$$\sin \alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال ١

إذا كانت النقطة (٣، ٤) ، $\alpha < 90^\circ$ تقع على دائرة الوحدة أوجد: قيمة α

الحل

∴ النقطة (٣، ٤) تقع على دائرة الوحدة

$$\therefore \text{تحقق معادلتها } 1 = \sin^2 + \cos^2$$

$$\therefore 1 = (\cos)^2 + (\sin)^2$$

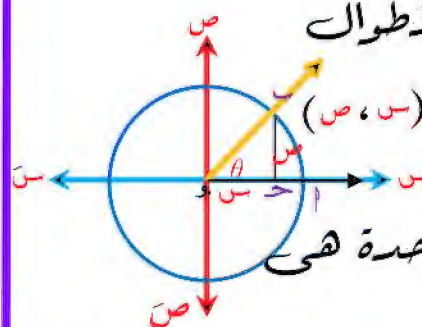
$$\therefore 1 = 9 + 16$$

$$\therefore 1 = 25 \quad \therefore \frac{1}{25} = \sin^2$$

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد وطول نصف

قطرها وحدة الأطوال



معادلة دائرة الوحدة هي

$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

$$\sqrt{\frac{144}{169}} \pm = \text{ص} \therefore \frac{144}{169} = \text{ص}^2$$

$$\therefore \frac{12}{13} \pm = \text{ص} \therefore \text{ص} < 0$$

$$\therefore \frac{12}{13} = \text{ص}$$

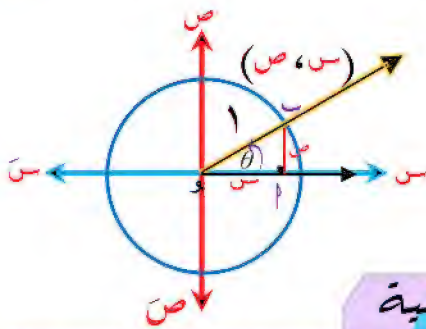
$$\sqrt{\frac{1}{25}} \pm = \text{ص} \therefore \frac{1}{5} \pm = \text{ص}$$

$$\therefore \frac{1}{5} = \text{ص} \therefore 0 < \text{ص}$$

مثال ٢

الدوال المثلثية

إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\text{ص}, \text{ص})$ فإن :



الدوال المثلثية

$$\cos \theta = \frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{صتا } \theta \quad (1)$$

$$\therefore \text{صتا } \theta = \text{الإحداثي السيني لنقطة ب}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{صتا } \theta \quad (2)$$

$$\therefore \text{صتا } \theta = \text{الإحداثي الصادي لنقطة ب}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{طتا } \theta \quad (3)$$

$$\therefore \text{طتا } \theta = \frac{\text{الإحداثي الصادي للنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة ب}}$$

إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{5}{13}, \text{ص})$ حيث : $180^\circ > \theta > 90^\circ$ أوجد قيمة : ص

الحل



$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

\therefore تقع في الربع الثاني

$$\therefore \text{ص} < 0$$

\therefore النقطة $(\frac{5}{13}, \text{ص})$ تقع على دائرة الوحدة

$$\therefore 1 = (\frac{5}{13})^2 + (\text{ص})^2$$

$$\therefore 1 = \text{ص}^2 + \frac{25}{169}$$

$$\therefore \text{ص}^2 = 1 - \frac{25}{169}$$

فمثلاً :

إذا كانت : θ قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فإن :

$$① \text{ جتا } \theta = \cos = \frac{3}{5}$$

$$② \text{ حا } \theta = \sin = \frac{4}{5}$$

$$③ \text{ طا } \theta = \frac{\sin}{\cos} = \frac{4}{3}$$

مثال ٣

إذا كانت : θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ حيث : $\theta \in [180^\circ, 270^\circ]$ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ

الحل

$$\therefore 270^\circ > \theta > 180^\circ$$

تقع في الربع الثالث

$$\therefore \cos > 0$$

∴ النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ تقع على دائرة الوحدة

$$\therefore \cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$\therefore 1 = (\cos)^2 + (-0,6)^2$$

$$\therefore 1 = \cos^2 + 0,36$$

$$\therefore \cos^2 = 1 - 0,36$$

$$\therefore \cos^2 = 0,64 \quad \therefore \cos = \pm 0,8$$

$$\therefore \cos = \pm 0,8 \quad \therefore \cos > 0$$

$$\therefore \cos = -0,8$$

∴ نقطة تقاطع الضلع النهائي مع دائرة الوحدة هي $(-0,8, -0,6)$ فيكون

$$① \text{ جتا } \theta = \cos = -0,8$$

$$② \text{ حا } \theta = \sin = -0,6$$

$$③ \text{ طا } \theta = \frac{\sin}{\cos} = \frac{-0,6}{-0,8} = \frac{3}{4}$$

مقلوبات الدوال المثلثية

مقلوبات الدوال المثلثية

secθ

$$① \text{ قاطع الزاوية } \theta = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$② \text{ قاطع تمام الزاوية } \theta = \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

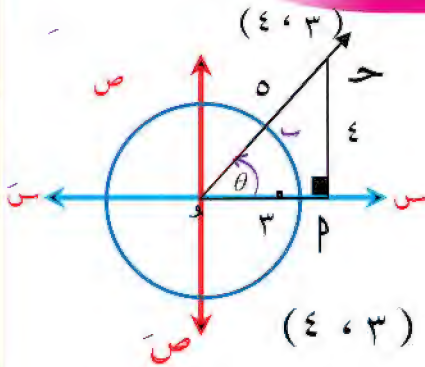
$$③ \text{ ظل تمام الزاوية } \theta = \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مثال ٥

إذا كانت: قياس زاوية موجهة في الوضع

القياسي والنقطة $(4, 3)$ تقع على ضلعها النهائي أوجد نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة ثم أوجد جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ

الحل



∴ النقطة ح $(4, 3)$

تقع على الضلع النهائي للزاوية
∴ $ج = 4$ وحدات طول
 $ح = 5$ وحدات طول
∴ $ص = 3$ وحدات طول
∴ $ج = 4$ ، $ص = 3$ ، $ح = 5$

نقطة ب $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ هي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة

$$١ \quad جتا \theta = ج = \frac{4}{5} ، \quad قتا \theta = \frac{3}{5}$$

$$٢ \quad حا \theta = ص = \frac{3}{5} \quad قتا \theta = \frac{4}{5}$$

$$٣ \quad طا \theta = \frac{ص}{ج} = \frac{3}{4} ، \quad طتا \theta = \frac{ج}{ص} = \frac{4}{3}$$

مثال ٤

إذا كانت: θ قياس زاوية موجهة في الوضع

القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة

الوحدة في النقطة ب $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

ومقلوباتها

الحل

$$١ \quad جتا \theta = ج = \frac{5}{13}$$

ومقلوبها

$$قا \theta = \frac{1}{جتا \theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$$

$$٢ \quad حا \theta = ص = \frac{12}{13}$$

ومقلوبها

$$قتا \theta = \frac{1}{حا \theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

$$٣ \quad طا \theta = \frac{ص}{ج} = \frac{12}{5}$$

ومقلوبها

$$طتا \theta = \frac{1}{طا \theta} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore 1 = {}^2P_5$$

$$\therefore \frac{1}{5} = {}^2P_1$$

$$\therefore \frac{1}{5} = {}^2P_1 = 1 < 2$$

النقطة هي $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

$$\textcircled{1} \text{ حنا } \theta = \text{س} = \frac{2}{5}$$

ومقلوبها

$$\text{قا } \theta = \frac{1}{5} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ حا } \theta = \text{ص} = \frac{1}{5}$$

ومقلوبها

$$\text{قتا } \theta = \frac{1}{\text{ص}} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\textcircled{3} \text{ طا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

ومقلوبها

$$\text{طنا } \theta = \frac{1}{\text{طا}} = \frac{\text{حنا}}{\text{حا}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \text{حنا } \theta = \frac{3}{5}, \text{ حا } \theta = \frac{4}{5}$$

نقطة ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ هي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة

$$\textcircled{1} \text{ حنا } \theta = \text{س} = \frac{3}{5}, \text{ قا } \theta = \frac{5}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ حا } \theta = \text{ص} = \frac{4}{5}, \text{ قتا } \theta = \frac{5}{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ طا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{4}{3}, \text{ طتا } \theta = \frac{3}{4}$$

مثال ٦

إذا كانت الضلع النهائي لزائوية موجبة

في الوضع القياسي قياسها θ يقطع دائرة

الوحدة في النقطة (P_1, P_2) ، $0 < P_1$ ،

أوجد قيمة P_2

أوجد قيمة المقدار :

$$1 + \text{طا} \theta - \text{قا} \theta$$

الحل

∴ النقطة ب (P_1, P_2) تقع على

دائرة الوحدة

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$$

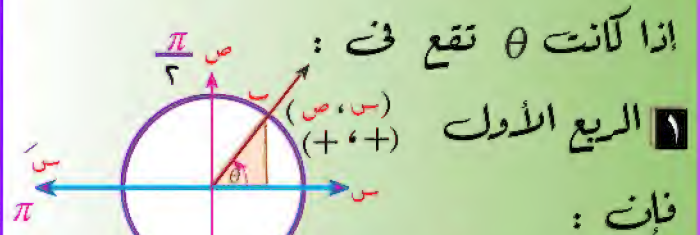
$$\therefore 1 = (P_1)^2 + (P_2)^2$$

$$\therefore 1 = {}^2P_1 + {}^2P_4$$



إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\cos(\theta), \sin(\theta))$



إذا كانت θ تقع في :
 الربع الأول $(+, +)$
 فإن :
 $\cos(\theta) > 0$ ، $\sin(\theta) > 0$
 الضلع النهائي يقع بين \vec{u} ، \vec{v}
 $\theta \in [0, 90[$ ، $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

كل النسب المثلثية للزاوية θ اشارةها موجبة

مثال ٧

عين إشارة كل من :

- ١) 50° ٢) 70°

الحل

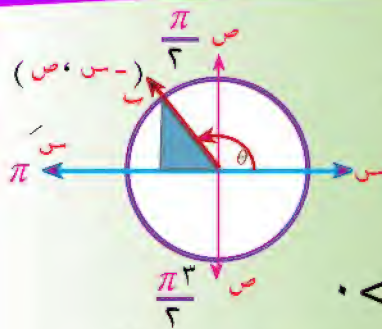
١) 50° تقع في الربع الأول

∴ إشارة 50° موجبة

٢) 70° تقع في الربع الأول

∴ إشارة 70° موجبة

الربع الثاني



الضلع النهائي يقع بين \vec{u} ، \vec{v}

$\theta \in [90, 180[$ ، $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

إشارة كل من : $\cos(\theta)$ ، $\sin(\theta)$
 موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ تكون سالبة

مثال ٨

عين إشارة كل من :

١) 120°

الحل

∴ 120° تقع في الربع الثاني

∴ إشارة 120° سالبة

٢) 170°

الحل

∴ 170° تقع في الربع الثاني

∴ إشارة 170° سالبة

الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية			الزاوية
	جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظنا	
الأول	+	+	+	$0, \frac{\pi}{2}$
الثاني	-	-	+	$\frac{\pi}{2}, \pi$
الثالث	+	-	-	$\pi, \frac{3\pi}{2}$
الرابع	-	+	-	$\frac{3\pi}{2}, 2\pi$

مثال ٩

عين إشارة النسب المثلثية الآتية:

١) 47.0° ٢) (-30.0°)

٣) $\frac{\pi}{3}$ ٤) 385.0°

الحل

١) \therefore الزاوية 47.0° تكافئ الزاوية

$$47.0^\circ = 360^\circ - 30.0^\circ$$

\therefore 47.0° تقع في الربع الثاني

\therefore إشارة 47.0° موجبة

٢) \therefore الزاوية 47.0° تكافئ الزاوية

(-30.0°) تكافئ زاوية

$$330^\circ = 360^\circ + 30.0^\circ$$

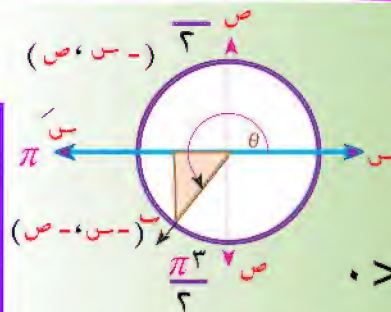
\therefore الزاوية 30.0° تقع في الربع الرابع

\therefore إشارة (-30.0°) موجبة

٣) القياس الستيني للزاوية $\frac{\pi}{3}$

$$30.0^\circ = \frac{180^\circ \times \pi}{3}$$

٣ الربع الثالث



$\sin > 0, \cos > 0$

الضلع النهائي يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

$$[270, 180] \ni \theta, \text{ أ } [\frac{\pi}{2}, \pi] \ni \theta$$

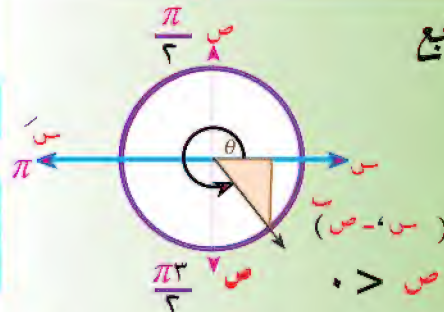
إشارة كل من :

$\sin \theta, \cos \theta$ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ

تكون سالبة

٤ الربع الرابع



$\sin < 0, \cos > 0$

الضلع النهائي يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

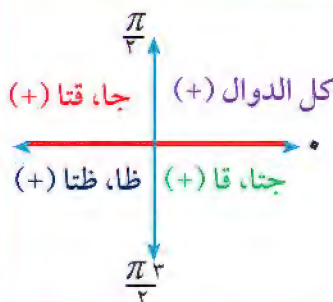
$$[270, 180] \ni \theta, \text{ أ } [\frac{\pi}{2}, \pi] \ni \theta$$

إشارة كل من :

$\sin \theta, \cos \theta$ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ

تكون سالبة



$$\therefore \text{ص}^2 = 0,64 \quad \therefore \text{ص} = \pm 0,8$$

$$\therefore \text{ص} = \pm 0,8 \quad \therefore \text{ص} < 0$$

$$\text{ص} = 0,8$$

$$\therefore \text{ب} = (0,8, 0,6)$$

$$\therefore \text{ط} = \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{قتا} = \theta = \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{القرار} = \text{قتا}^2 - \text{ط}^2$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{16} - \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{16}{16} =$$

$$1$$

مثال ١١

$$\text{إذا كانت } 180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$$

$$\text{، ولأن ظا } \theta = \frac{7}{24} \text{ أوجد قيمة جميع}$$

النسب التلتية للزاوية

الحل

$$\therefore 180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$$

$$\therefore \theta \text{ تقع في الربع الثالث}$$

$$\therefore \text{ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة}$$

$$\text{في } (-\text{س}, -\text{ص})$$

$$\therefore \text{الزاوية تقع في الربع الرابع}$$

$$\therefore \text{قتا} = \frac{\pi}{3} \text{ سالبة}$$

$$\text{٤) ط} = 3850^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية } 3850^\circ \text{ تكافئ الزاوية}$$

$$3850^\circ = 360^\circ \times 10 - 3850^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية } 3850^\circ \text{ تقع في الربع الثالث}$$

مثال ١٠

$$\text{إذا كانت } \theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \text{، حتا } \theta = 0,6 \text{، فأوجد قيمة القرار: } \text{قتا}^2 - \text{ط}^2$$

الحل

$$\therefore \text{حتا } \theta = 0,6$$

نفرض أن الضلع النهائي للزاوية θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$$(0,6, \text{ص}) \quad \theta \text{ تقع في الربع الأول}$$

$$\therefore \text{ص} > 0$$

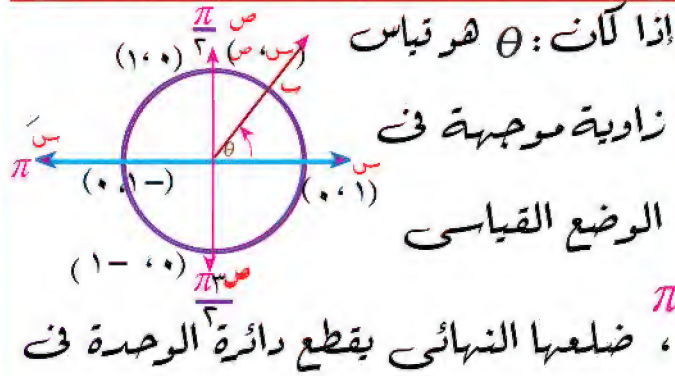
$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$$

$$\therefore 1 = (\text{ص})^2 + (0,6)^2$$

$$\therefore 1 = \text{ص}^2 + 0,36$$

$$\therefore \text{ص}^2 = 1 - 0,36$$

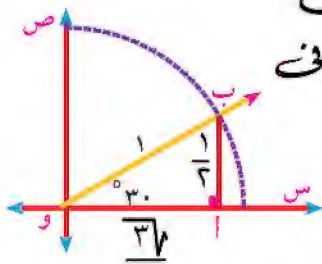
الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$
(١) الزوايا الربعية

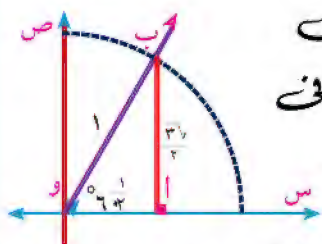
قيم الدوال المثلثية			النقطة على دائرة الوحدة	الزاوية بالراديان
طا θ	حا θ	جتا θ		
٠	٠	١	(١, ٠)	٠°
غير معرف	١	٠	(٠, ١)	٩٠°
٠	٠	-١	(٠, -١)	١٨٠°
غير معرف	-١	٠	(-١, ٠)	٢٧٠°

(٢) إذا كانت $\theta = 30^\circ$
فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



جتا $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، حا $30^\circ = \frac{1}{2}$ ، طا $30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(٣) إذا كانت $\theta = 60^\circ$
فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$ ، حا $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، طا $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$\therefore 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$\therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

النقطة هي

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ جتا } \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومقلوبها

$$\text{فا } \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{2} \text{ حا } \theta = \sin \theta = \frac{1}{2}$$

ومقلوبها

$$\text{فتا } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\textcircled{3} \text{ طا } \theta = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومقلوبها

$$\text{طتا } \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

مثال ١٣

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة
لك مما يأتي :

$$(١) \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ - \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

الحل

∴ المقدار

$$= \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ - \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$(٢) \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ - \text{ جتا } ١٨٠^\circ$$

الحل

∴ المقدار

$$= \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ - \text{ جتا } ١٨٠^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(٣) \text{ ظا } ٦٠^\circ - \text{ قا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ$$

الحل

المقدار

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$(٢) \text{ إذا كانت } \theta = ٤٥^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

فإن ضلعها النهائي
يقطع دائرة الوحدة في

$$\text{النقطة } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ جا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ طا } ٤٥^\circ = 1$$

مثال ١٢

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{\pi^2}{4}$$

الحل

الطرف الأيمن

$$= \text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

← ١

$$\therefore \text{ الطرف الأيسر } = \frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ$$

$$= \text{ جا } ٤٥^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow ٢$$

من ١، ٢ ينتج أن الطرفين متساويان

$$\text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \text{بسيط = المقام}$$

$$= 1 = \text{اليسر}$$

مثال ١٥

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س اذا كان :

$$\textcircled{1} \text{ س} = \text{جتا } 30^\circ \cdot \text{ظا } 30^\circ + \text{ظا } 45^\circ$$

الحل

$$\text{س} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1)$$

$$\therefore \text{س} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ س} = 3 \cdot \text{جتا } 60^\circ - 4 \cdot \text{جا } 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \text{ظا } 45^\circ$$

الحل

$$\therefore \text{س} = 3 \cdot \text{جتا } 60^\circ - 4 \cdot \text{جا } 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \text{ظا } 45^\circ$$

$$\text{س} = \frac{1}{2} \times 3 - \left(\frac{1}{2}\right) \times 4 + \frac{1}{2} \times (1)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{3}{2} + 1 - \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \text{س} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 4 + 1 + 4 - 3 =$$

$$2 + 4 - 3 =$$

$$3 =$$

مثال ١٤

اثبت صحة التطابقات التالية

$$\textcircled{1} \text{ جا } 30^\circ \cdot \text{جتا } 60^\circ + \text{جتا } 30^\circ \cdot \text{جا } 60^\circ = 90^\circ$$

الحل

$$\text{اليمين} = \text{جا } 30^\circ \cdot \text{جتا } 60^\circ + \text{جتا } 30^\circ \cdot \text{جا } 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{4}{4} =$$

$$1 = \textcircled{1}$$

$$\text{اليسر} = \text{جا } 90^\circ = 1 = \textcircled{2}$$

من ١، ٢ ينتج أن الطرفين متساويان

$$\frac{\text{جتا } 30^\circ \cdot \text{جتا } 45^\circ - \text{جا } 45^\circ \cdot \text{جا } 30^\circ}{\text{جا } 45^\circ \cdot \text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 45^\circ \cdot \text{جا } 30^\circ} = 1 \textcircled{1}$$

الحل

$$\text{اليمين} = \frac{\text{جتا } 30^\circ \cdot \text{جتا } 45^\circ - \text{جا } 45^\circ \cdot \text{جا } 30^\circ}{\text{جا } 45^\circ \cdot \text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 45^\circ \cdot \text{جا } 30^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

تمارين

١ أكمل العبارات الآتية :

- ① طننا $60^\circ = \dots$ ② جتنا $180^\circ = \dots$
 ③ قتنا $90^\circ = \dots$ ④ طنا $30^\circ = \dots$
 ⑤ جنا $30^\circ \times$ جتنا $30^\circ = \dots$ ⑥ طننا $30^\circ +$ جنا $45^\circ = \dots$
 ⑦ طنا $90^\circ = \dots$ ⑧ جتنا $270^\circ = \dots$
 ⑨ إذا كان : س جنا $30^\circ +$ جتنا $180^\circ =$ فإن : س =
 ⑩ إذا كان : س $2 =$ جتنا $45^\circ +$ جتنا $45^\circ =$ فإن : س =

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

- ① جنا 30° ظنا $45^\circ + 2$ قنا $45^\circ -$ ظنا 60°
 ② جنا $30^\circ + 8$ جتنا $60^\circ -$ ظنا 45° جتنا 180°
 ③ قنا $60^\circ - 4$ جنا $45^\circ +$ جنا 270°
 ④ جتنا 90° قتنا $30^\circ +$ قنا 45° جنا $30^\circ -$ جتنا 270° جنا 180°
 ⑤ جنا 90° جتنا $30^\circ -$ جتنا 90° جنا 30°
 ⑥ جتنا 90° قتنا $30^\circ +$ قنا 45° جنا $30^\circ -$ جتنا 270° جنا 180°

٣ اثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

- ① جتنا 30° جتنا $60^\circ -$ جنا 30° جنا $60^\circ =$ جتنا 90°
 ② جنا 30° جتنا $30^\circ =$ جنا 60°
 ③ جتنا $90^\circ =$ جتنا $45^\circ -$ جنا 45°
 ④ جنا $90^\circ = 2$ جنا $45^\circ + 3$ جتنا 270°
 ⑤ قتنا 60° ظنا 30° ظنا $60^\circ = 2$ قنا 45° جتنا 30°
 ⑥ جتنا $60^\circ = 2$ جتنا $30^\circ - 1$

٤ أوجد قيمة س إذا كان :

- ① س جنا $\frac{\pi}{4}$ جتنا $\pi =$ ظنا $\frac{\pi}{3}$ جنا $\frac{\pi}{2}$ ② س جنا $\frac{\pi}{4}$ جتنا $\frac{\pi}{4}$ ظنا $\frac{\pi}{6} =$ ظنا $\frac{\pi}{4}$ جتنا $\frac{\pi}{3} -$ جتنا $\frac{\pi}{2}$

الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان هما زاويتان مجموع قياسيهما أو الفرق بين قياسيهما عدد صحيح من القوائم

إذا كانت θ, ϕ هما قياسا زاويتان منتسبتان
فإن: $\theta + \phi = 90^\circ$ ن
أو $\theta - \phi = 90^\circ$ ن
حيث ن عدد صحيح

مثال ١

إذا كانت السكك θ, ϕ و ψ رباعي دائري
فإن: $\frac{\theta}{\psi} + \frac{\phi}{\psi} = \dots\dots\dots$
١ ٢ ٣ ٤ ٥ صفر

مثال ٢

أكمل: ١ $\theta = 20^\circ$ حـا
٢ $\theta = 100^\circ$ قتا
٣ $\theta = 50^\circ$ حـا
٤ $\theta = 180^\circ - (\theta - 180^\circ)$ حـا

الزاويتان $\theta, 180^\circ - \theta$ تعيينان على دائرة الوحدة النقطتان θ و $(\theta - 180^\circ)$ (ص، ص)
الزاويتان تختلفان في إشارة الإحداثي السيني
∴ $\sin \theta = \sin (\theta - 180^\circ)$ ، $\cos \theta = -\cos (\theta - 180^\circ)$
فيكون

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sin \theta &= -\sin (\theta - 180^\circ) \\ \textcircled{2} \sin \theta &= \sin (\theta - 180^\circ) \\ \textcircled{3} \text{ إذا كان: } \theta + \phi &= 180^\circ \\ \sin \theta + \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

١ الزاويتان المنتسبتان $\theta, 180^\circ - \theta$

إذا كانت الزاوية التي قياسها θ تعيين على دائرة الوحدة النقطة θ (ص، ص)
فإن الزاوية التي قياسها $180^\circ - \theta$ تعيين على دائرة الوحدة النقطة $(\theta - 180^\circ)$ (ص، ص)

فإن الزاوية التي قياسها $180^\circ - \theta$ تعيين على دائرة الوحدة النقطة $(\theta - 180^\circ)$ (ص، ص)

وبالملاحظة أن الزاويتان لهما نفس الإحداثي العادي فيكون:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin (\theta - 180^\circ) \\ \cos \theta &= -\cos (\theta - 180^\circ) \end{aligned}$$

حـا زاوية = حـا مكملة هذه الزاوية

إذا كان السكك θ, ϕ و ψ رباعي دائري
فإن: $\theta + \phi = 180^\circ$
 $\sin \theta = \sin \phi$ ، $\cos \theta = -\cos \phi$

مثال ٣

إذا كان الشكل $\triangle ABC$ دوائر دائرية
فإن :

$$① \quad \sin A = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin B = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$③ \quad \sin C = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

مثال ٤

إذا كان الشكل $\triangle ABC$ متوازي أضلاع
فإن :

$$\sin A = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

مثال ٥

في $\triangle ABC$ أكمل

$$① \quad \sin A = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin B = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$③ \quad \sin C = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

مثال ٦

أكمل ما يأتي :

$$① \quad \sin 30^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin 45^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

الزاويتان θ ، $180^\circ - \theta$ تعينان على
دائرة الوحدة النقطتان P (س،ص)
 Q (-س،ص)

الزاويتان تختلفان في إشارة الإحداثي
السيني

$$\therefore \sin \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} ، \sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \sin \theta$$

$$① \quad \sin \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \dots\dots\dots$$

$$③ \quad \text{إذا كان : } \sin \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \dots\dots\dots$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \dots\dots\dots$$

$$\sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \dots\dots\dots$$

مثال ٧

$$\text{أكمل : } ① \quad \sin 20^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin 120^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$③ \quad \sin 150^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$④ \quad \sin 135^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

الدوال التلتية للزاويتان : θ ، $180^\circ - \theta$

$$① \quad \sin \theta = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$② \quad \sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$③ \quad \sin \theta = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

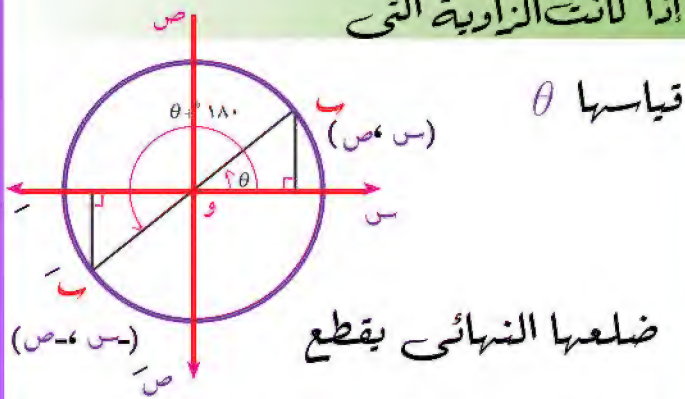
$$④ \quad \sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$⑤ \quad \sin \theta = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

$$⑥ \quad \sin (180^\circ - \theta) = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \frac{\text{جنا}}{\text{جنا}} = \dots\dots\dots$$

٢ الدوال التثلثية للمزاويتان: θ ، $\theta + 180^\circ$

إذا كانت الزاوية التي

قياسها θ

ضلعها النهائي يقطع

دائرة الوحدة النقطة $(\cos(\theta + 180^\circ), \sin(\theta + 180^\circ))$ فإن الزاوية التي قياسها $(\theta + 180^\circ)$

ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$

ونلاحظ:

$$\textcircled{1} \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta, \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\therefore \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

$$\textcircled{2} \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta, \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

$$\therefore \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta + 180^\circ) = \frac{\sin(\theta + 180^\circ)}{\cos(\theta + 180^\circ)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\therefore \tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta$$

الخلاصة

إيجاد نسبة مثلثية للزاوية

للزاوية $(\theta + 180^\circ)$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

الربع الثالث

النسبة التثلثية للزاوية

إشارة النسبة التثلثية في هذا الربع

مثال ٨

بدون استخدام الحاسبة أو جدول قيمة

جنا 120° متكاملتان

$$\therefore 120^\circ, 60^\circ$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = -\text{جنا } 60^\circ$$

$$\text{جنا } 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

حل آخر

 $\therefore 120^\circ$ تقع في الربع الثاني

$$\therefore 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = \text{جنا } (180^\circ - 60^\circ)$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = -\text{جنا } 60^\circ$$

$$= -\frac{1}{2}$$

مثال ٩

إذا كانت θ زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

فأكمل ما يأتي

$$\textcircled{1} \cos(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{2} \sin(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{4} \cot(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{5} \csc(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{6} \sec(\theta - 180^\circ) = \dots$$

مثال ١٠

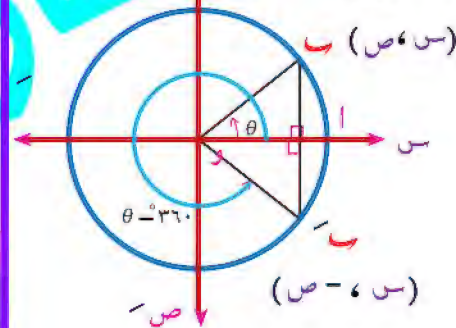
إذا كانت θ زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$

فأكمل ما يأتي

- ١ جتا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٢ جا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٣ ظا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٤ قتا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٥ قا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٦ ظتا $(\theta + 180^\circ) =$

٣ الدوال المتلصبة للزاويتان: θ ، $\theta - 360^\circ$

إذا كانت الزاوية التي قياسها θ



ضلعها النهائي يقطع

دائرة الوحدة النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$

فإن الزاوية التي قياسها $(\theta - 360^\circ)$

ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $(\cos(\theta - 360^\circ), \sin(\theta - 360^\circ))$

ونلاحظ أن :

$$١ \text{ جتا } \theta = \text{جتا } (\theta - 360^\circ) ، \text{جتا } \theta = \text{جتا } (\theta - 360^\circ)$$

$$\therefore \text{جتا } (\theta - 360^\circ) = \text{جتا } \theta$$

$$٢ \text{ جا } \theta = \text{جا } (\theta - 360^\circ) ، \text{جا } \theta = \text{جا } (\theta - 360^\circ)$$

$$\therefore \text{جا } (\theta - 360^\circ) = \text{جا } \theta$$

$$٣ \text{ طا } \theta = \text{طا } (\theta - 360^\circ) ، \text{طا } \theta = \text{طا } (\theta - 360^\circ)$$

$$\therefore \text{طا } (\theta - 360^\circ) = \text{طا } \theta$$

٤

الدوال المتلصبة للزاويتان: θ ، $\theta - 360^\circ$

$$١ \text{ جتا } \theta = \text{جتا } (\theta - 360^\circ) ، \text{جتا } \theta = \text{جتا } (\theta - 360^\circ)$$

$$٢ \text{ جا } \theta = \text{جا } (\theta - 360^\circ) ، \text{جا } \theta = \text{جا } (\theta - 360^\circ)$$

$$٣ \text{ ظا } \theta = \text{ظا } (\theta - 360^\circ) ، \text{ظا } \theta = \text{ظا } (\theta - 360^\circ)$$

$$٤ \text{ قتا } \theta = \text{قتا } (\theta - 360^\circ) ، \text{قتا } \theta = \text{قتا } (\theta - 360^\circ)$$

$$٥ \text{ قا } \theta = \text{قا } (\theta - 360^\circ) ، \text{قا } \theta = \text{قا } (\theta - 360^\circ)$$

$$٦ \text{ ظتا } \theta = \text{ظتا } (\theta - 360^\circ) ، \text{ظتا } \theta = \text{ظتا } (\theta - 360^\circ)$$

ملحوظة

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي

$$٣٦٠^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore ٣٦٠^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore ٣٦٠^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore \text{جتا } (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \text{جتا } ٣٦٠^\circ$$

$$\text{جتا } ٣٦٠^\circ =$$

مثال ١١

في أي شكل رباعي a, b, c, d يكون

$$\dots = \frac{b}{(d+a+b)} + \frac{c}{d}$$

مثال ١٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

$$1) \quad 300$$

الحل

\therefore تقع في الربع الرابع

$$360 - 60 = 300$$

$$\therefore 300 = 360 - 60$$

$$\frac{360}{2} =$$

$$4) \quad 210$$

الحل

\therefore تقع في الربع الثالث

$$180 + 30 = 210$$

$$\therefore 210 = 180 + 30$$

$$\frac{1}{360} =$$

$$5) \quad 150$$

الحل

\therefore تقع في الربع الثاني

$$180 - 30 = 150$$

$$\therefore 150 = 180 - 30$$

$$2 =$$

$$6) \quad 240$$

الحل

\therefore تقع في الربع الثاني

$$180 + 60 = 240$$

$$\therefore 240 = 180 + 60$$

$$\frac{360}{2} =$$

$$2) \quad 330$$

الحل

\therefore تقع في الربع الرابع

$$360 - 30 = 330$$

$$\therefore 330 = 360 - 30$$

$$\frac{360}{2} =$$

مثال ١٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$100^\circ \text{ حتا} (-30^\circ) + 150^\circ \text{ حتا} (-240^\circ) = -1^\circ$$

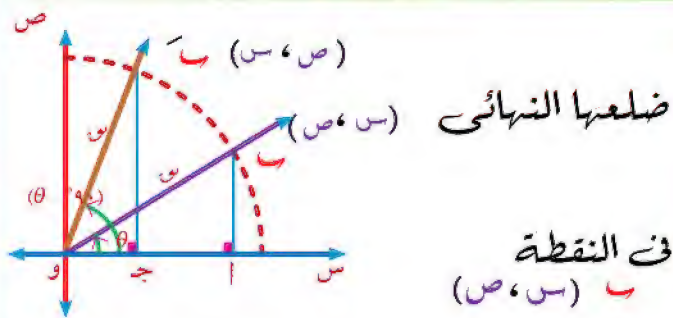
الحل

\therefore تقع في الربع الرابع

$$360 - 45 = 315$$

$$\therefore 315 = 360 - 45$$

$$\frac{360}{2} =$$

٤ الدوال التلقية للزاويتان θ ، $90^\circ - \theta$ إذا كانت الزاوية الوجهة التي قياسها θ فإن الزاوية التي قياسها $90^\circ - \theta$ ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta))$

ونلاحظ :

$$① \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta) , \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$② \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) , \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$③ \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta) , \cot \theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$$

لأي زاويتين متتامتين α ، β فإن

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta \quad \csc \alpha = \sec \beta$$

الزاويتان : 30° ، 60°
هما زاويتان متتامتان

الحل

$$60^\circ , (30^\circ -) , (240^\circ -)$$

$$360^\circ + 240^\circ = 600^\circ$$

∴ الزاوية التي قياسها 240° تلك في زاوية قياسها 240° $(30^\circ -)$ قياسها الوجه هو 330° $(240^\circ -)$ قياسها الوجه هو 120°

اليمين

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

$$= \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -) = \cos(240^\circ -) + \sin(30^\circ -)$$

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

$$\text{قيمة : } \cos \frac{\pi}{3}$$

مثال

نأمل ما يأتي

- ① جتا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ② جا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ③ ظا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ④ قتا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ⑤ قا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ⑥ ظنا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

① جتا $120 =$

② جا $150 =$

③ ظا $135 =$

④ قتا $120 =$

⑤ قا $150 =$

⑥ ظنا $135 =$

$\therefore \text{جتا } 20^\circ = \text{جا } 70^\circ$

$\text{جا } 20^\circ = \text{جتا } 70^\circ$

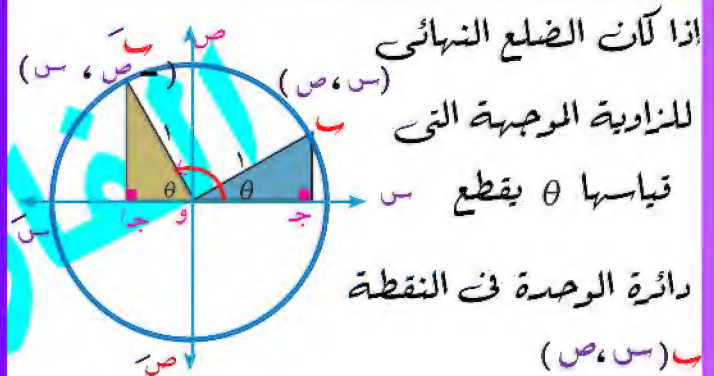
مثال ١٤

أمل

① جتا $50^\circ - \text{جا } 40^\circ = \dots\dots\dots$

② قتا $80^\circ - \frac{\text{طا } 10^\circ}{\text{ظنا } 10^\circ} = \dots\dots\dots$

③ جتا $20^\circ \text{ جتا } 20^\circ - \text{جا } 70^\circ \text{ جا } 70^\circ =$

⑤ الدوال التلنية للزاويتان θ ، $\theta + 90$ 

فإن الزاوية التي قياسها $\theta + 90^\circ$ ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(-\sin \theta, \cos \theta)$

الدوال التلنية للزاويتان: θ ، $\theta + 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 90^\circ) &= \text{جتا } \theta, \text{ قتا } (\theta + 90^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{جا } \theta, \text{ قا } (\theta + 90^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظنا } \theta, \text{ ظنا } (\theta + 90^\circ) = -\text{طا } \theta \end{aligned}$$

مثال ١٥

إذا كانت: θ زاوية موضحة في الرضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta + 270^\circ$

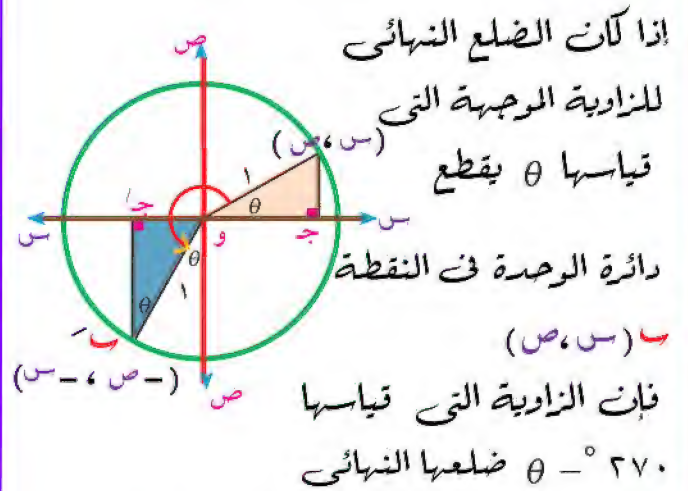
$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{ظتا } \theta \\ \text{قتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{قا } (\theta + 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{طتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{طتا } \theta \end{aligned}$$

الدوال التثلثية للزاويتين: $(\theta, \theta -)$

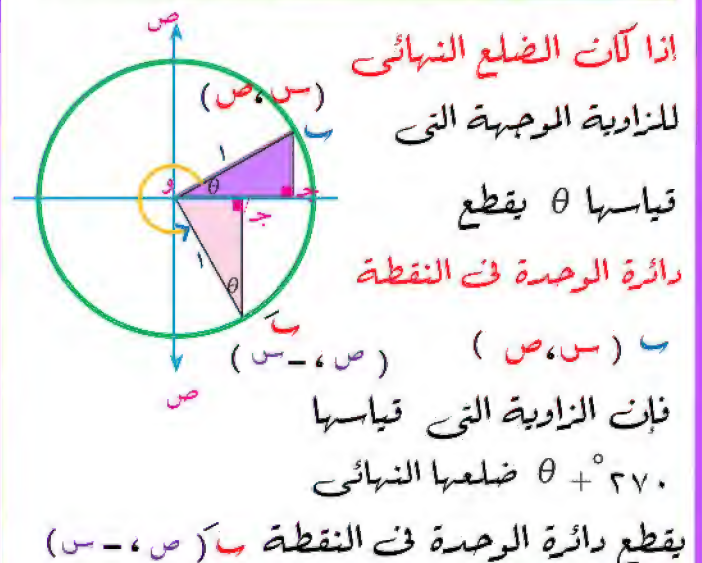
$$\begin{aligned} \text{جتا } (\theta -) &= \text{جتا } \theta \\ \text{جا } (\theta -) &= -\text{جا } \theta \\ \text{قا } (\theta -) &= \text{قا } \theta \\ \text{قتا } (\theta -) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta -) &= \text{ظا } \theta \\ \text{ظتا } (\theta -) &= -\text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

ملاحظات

①

الزوايا التي لها القياس: θ ، $(\theta - 90^\circ)$ تقع في الربع الأولالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 90^\circ)$ ، $(\theta - 180^\circ)$ تقع في الربع الثانيالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 180^\circ)$ ، $(\theta - 270^\circ)$ تقع في الربع الثالثالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 270^\circ)$ ، $(\theta - 360^\circ)$ ، $(\theta -)$ تقع في الربع الرابع.الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 270^\circ$ الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 270^\circ$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 270^\circ) &= \text{ظتا } \theta \\ \text{قتا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{قا } (\theta - 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{طتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{طتا } \theta \end{aligned}$$

الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta + 270^\circ$ 

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{جتا } 120^\circ &= \text{جتا } (180^\circ - 60^\circ) = -\text{جتا } 60^\circ = -\frac{1}{2} \\
 \text{ظا } 315^\circ &= \text{ظا } (360^\circ - 45^\circ) = -\text{ظا } 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \text{جا } 240^\circ &= \text{جا } (180^\circ + 60^\circ) = -\text{جا } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \text{ظا } 300^\circ &= \text{ظا } (360^\circ - 60^\circ) = -\text{ظا } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore \text{جتا } 120^\circ \text{ ظا } 315^\circ + \text{جا } 240^\circ \text{ ظا } 300^\circ &= \\
 2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) + \left(1 - x \right) \left(1 - x \right) =
 \end{aligned}$$

حل المعادلات المثلثية البسيطة

١ إذا كان: $\alpha = \text{جتا } \beta$ فإن:

$$\sim 360^\circ + 90^\circ = \beta \pm \alpha$$

$$\sim \pi + \frac{\pi}{2} = \beta \pm \alpha$$

حيث \sim عدد صحيح

٢ إذا كان: $\alpha = \text{قتا } \beta$ فإن:

$$\sim 360^\circ + 90^\circ = \beta \pm \alpha$$

$$\sim \pi + \frac{\pi}{2} = \beta \pm \alpha$$

حيث \sim عدد صحيح

٣ إذا كان: $\alpha = \text{ظتا } \beta$ فإن:

$$\sim 180^\circ + 90^\circ = \beta + \alpha$$

$$\sim \pi + \frac{\pi}{2} = \beta + \alpha$$

حيث \sim عدد صحيح

٢

الزوايا التي قياسها: θ ، $(180^\circ - \theta)$ ،

$$(\theta + 180^\circ), (\theta - 360^\circ), (\theta -)$$

تكون نفس الدالة التثلثية لها جميعاً
متساوية من حيث القيمة العددية فقط
وتختلف فقط في الإشارة حسب الربع الذي
تقع فيه كل منها

٣

الزوايا التي قياسها:

$$(\theta + 90^\circ), (\theta - 90^\circ)$$

$$(\theta + 270^\circ), (\theta - 270^\circ)$$

تتغير فيها الدالة التثلثية للزاوية التي قياسها
" θ " بوضع حرف (ت) في الدالة التي ليس
بها حرف (ت) - أو بحذف حرف (ت)
من الدالة التي بها حرف (ت)

(جتا) تصب (جا)، (قتا) تصب (قا) وتختلف

في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية
قبل تغيير الدالة التثلثية

مثال ١٦

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

قيمة

$$\text{جتا } 120^\circ \text{ ظا } 315^\circ + \text{جا } 240^\circ \text{ ظا } 300^\circ$$



www.Cryp2Day.com

موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ١٧

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية
نم أوجد قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin \theta = \cos 2\theta$$

الحل

$$\therefore \sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\begin{array}{l|l} \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \text{بالقسمة على ١ للطرفين} & \text{بالقسمة على ٢ للطرفين} \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \end{array}$$

الحل العام هو :

$$\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{2} + 2\theta$$

بإيجاد قيم θ

$$\begin{array}{l|l} \text{بوضع } \theta = 0 & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \text{بوضع } \theta = 1 & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \text{بوضع } \theta = 2 & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \text{بوضع } \theta = 3 & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \end{array}$$

$$\sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

الحل

$$\sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

بالقسمة على ١ للطرفين

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\text{بوضع } \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\text{بوضع } \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\text{بوضع } \theta = 2 \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\text{بوضع } \theta = 3 \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore 36 \text{ ظا } \theta = 1$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{1}{36} < \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الأول أو الثالث

$$^{\circ}210 = ^{\circ}30 + ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}30 = \theta$$

$$\{^{\circ}210, ^{\circ}30\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{2} \text{ جتا } \theta = 1 - \theta = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{جتا } \theta = 1 - \theta < \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الأول أو الثاني

$$^{\circ}150 = ^{\circ}30 - ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}30 = \theta$$

$$\{^{\circ}150, ^{\circ}30\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{3} \text{ جتا } \theta = \theta = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{جتا } \theta = \text{صفر}$$

$$\text{جتا } \theta = \text{صفر}$$

$$^{\circ}270, ^{\circ}90 = \theta \quad | \quad ^{\circ}180, ^{\circ}0 = \theta$$

$$\{^{\circ}270, ^{\circ}180, ^{\circ}90, ^{\circ}0\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{2} \text{ جتا } \theta = 1 + \theta = \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

$$^{\circ}60 + ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}60 - ^{\circ}180 = \theta$$

$$^{\circ}240 = \quad | \quad ^{\circ}120 =$$

$$\{^{\circ}240, ^{\circ}120\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{3} \text{ قتا } \theta = \text{قتا } (30 + \theta)$$

الحل

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) \pm \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) - \theta \quad | \quad ^{\circ}30 + \theta =$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = ^{\circ}30 - \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}120 = \theta$$

بالقسمة على 6 للطرفين

$$^{\circ}90 + ^{\circ}30 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } \theta = 0$$

$$^{\circ}30 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } \theta = 1$$

$$^{\circ}120 = ^{\circ}90 + ^{\circ}30 = \theta \therefore$$

مرفوض

$$^{\circ}60 + ^{\circ}10 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } \theta = 0$$

$$^{\circ}10 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } \theta = 1$$

$$^{\circ}70 = ^{\circ}60 + ^{\circ}10 = \theta$$

$$\text{بوضع } \theta = 2$$

$$\therefore \theta = 30 \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \theta \in \{^{\circ}70, ^{\circ}30, ^{\circ}10\}$$

مثال ١٧

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\textcircled{1} 36 \text{ ظا } \theta = 1$$

تمارين (١٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : هـ مـا $(\theta - 90^\circ) = \varepsilon$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن : هـ مـا $\theta = \dots\dots\dots$ (أ) $\frac{0}{\varepsilon}$ (ب) $\frac{30}{\varepsilon}$ (ج) $\frac{\varepsilon}{0}$ (د) $\frac{3}{0}$ ② إذا كانت : طـا $(\theta + 90^\circ) = 1 + \dots$ حيث : $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن : هـ مـا $\varepsilon \theta = \dots\dots\dots$ (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) $1 - \dots$ ③ إذا كان : هـ مـا $(\theta + 90^\circ) + \dots + (\theta - 90^\circ) = 0$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{\varepsilon}]$ فإن : هـ مـا $\theta = \dots\dots\dots$
(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ إذا كان : هـ مـا $(\theta - 270^\circ) = \frac{1}{4}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبةفإن : $\theta = \dots\dots\dots$ (أ) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330° ⑤ إذا كان : طـا $\theta = \frac{0}{12}$ ، هـ مـا $\theta > 0$ فإن : هـ مـا $\theta = \dots\dots\dots$ (أ) $\frac{0}{13}$ (ب) $\frac{0}{13}$ (ج) $\frac{13}{0}$ (د) $\frac{13}{0}$ ⑥ إذا كان : هـ مـا $\theta = \frac{1}{4}$ ، طـا $\theta < 0$ فإن : $\theta = \dots\dots\dots$ (أ) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330° ⑦ إذا كان هـ مـا $\theta = \frac{3}{0}$ حيث $18^\circ < \theta < 27^\circ$ فأوجد قيمة كل من :① طـا $(\theta + 180^\circ)$ ② طـا $(\theta - \dots)$ ③ طـا $(\theta - 270^\circ)$ ④ طـا $(90^\circ - \theta)$ ⑤ طـا $(\theta + 90^\circ)$ ⑥ طـا $(\theta - 270^\circ)$ ⑦ طـا $(\theta + 270^\circ)$

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

② هـ مـا $\theta = \theta$ ① هـ مـا $\theta = \theta$ 

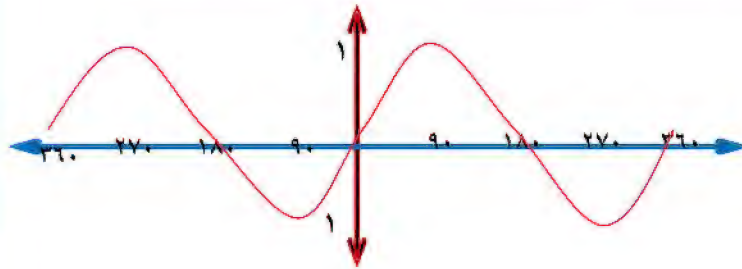
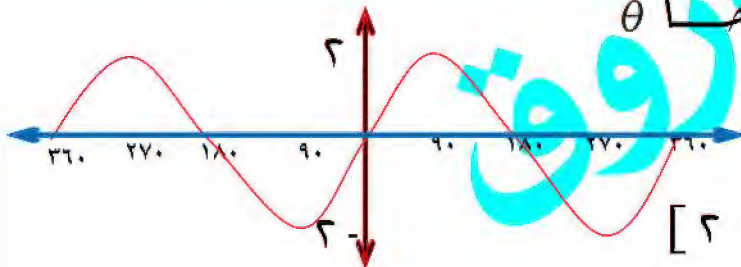
التمثيل البياني للدوال المثلثية

دالة الجيب

عند تمثيل الدالة $y = \sin(\theta)$:

θ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
جا θ	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

نحصل على المنحنى القابل

١ مدى الدالة هو الفترة $[-1, 1]$ ٢ مجال الدالة هو \mathbb{R} ٣ الدالة دورية دورتها 2π ٤ القيمة العظمى للدالة $= 1$ وتبلغها عند $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ ٥ القيمة الصغرى للدالة $= -1$ وتبلغها عند $\theta = 270^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ عند تمثيل الدالة $y = 2 \sin(\theta)$:

نلاحظ أن :

١ مدى الدالة هو الفترة $[-2, 2]$ ٢ القيمة العظمى للدالة $= 2$ وتبلغها عند $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$ ٥ القيمة الصغرى للدالة $= -2$ وتبلغها عند $\theta = 270^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$

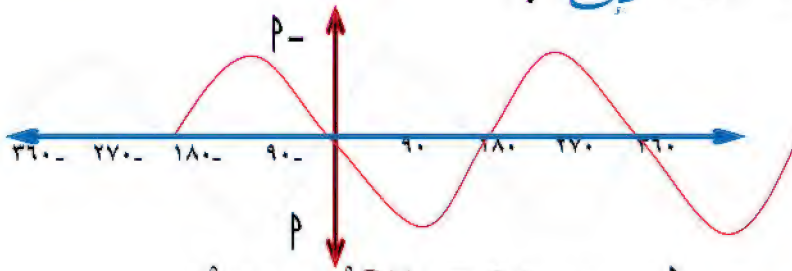
ملحوظة

■ إذا كانت $y = p \sin(\theta)$ ، $p > 0$ فإن

■ إذا كانت

: $y = p \sin(\theta)$ فإن١ مدى الدالة هو الفترة $[-p, p]$ ٢ القيمة العظمى $= p$ ٣ القيمة الصغرى $= -p$ ٤ الدالة دورية ودورها 2π الدالة دورية ودورها $\frac{2\pi}{|p|}$

■ إذا كانت θ د $P = (\theta)$ حـ $P > 0$ فإن :



① هو نفس منحنى الدالة

ص $P = \theta$ حـ

بالانعكاس في محور السينات

② المنحنى يبلغ القيمة العظمى P عندما $\theta = 360^\circ + 270^\circ$

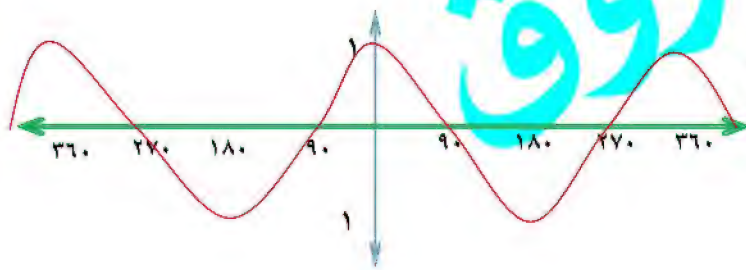
③ القيمة الصغرى $P- = \theta$ عندما $\theta = 360^\circ + 90^\circ$

④ الدالة دورية ودورتها $\pi 2$

دالة جيب التمام

عند تمثيل الدالة θ د $(\theta) = \theta$ حـ

θ	360	330	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0	
حـ θ	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1	



نحصل على المنحنى المقابل

● مدى الدالة هو الفترة $[-1, 1]$

● مجال الدالة هو \mathbb{R}

● الدالة دورية ودورتها $\pi 2$

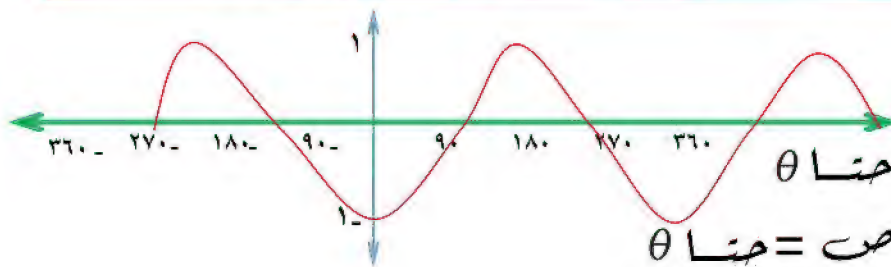
● القيمة العظمى للدالة 1

● القيمة الصغرى للدالة -1

عند $\theta = 360^\circ$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

عند $\theta = 360^\circ + 180^\circ$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

ملحوظة



منحنى الدالة θ د $(\theta) = \theta$ حـ

هو نفس منحنى الدالة : ص $\theta = \theta$ حـ

بالانعكاس في محور السينات

■ من معنى الدالة د :

$$د(\theta) = -\sin \theta$$

① القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عند :

$$\theta = 180^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$$

② القيمة الصغرى للدالة = -١

وتبلغها الدالة عند :

$$\theta = 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$$

ملاحظات على دالتي الجيب وجيب التمام

د(θ) = أجاب θ ، د(θ) = أجتاب θ دالة دورية

■ الدى = $[1, -1]$

■ الدورة = $\frac{2\pi}{|b|}$

مثال ١

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والدى والدورة لكل من الدوال الآتية

① ص = ما θ

الحل

ص = ما θ ، ١ = ١ ، ١ = ب

القيمة العظمى = ١

= -١ =

الدى = $[1, -1]$ = $[1, -1]$
الدورة = $\frac{2\pi}{|b|} = \pi$

② ص = ٣ ما θ

الحل

١ = ب ، ٣ = ١

القيمة العظمى = ٣

= -١ = -٣ = القيمة الصغرى

الدى = $[3, -1]$ = $[1, -1]$

الدورة = $\frac{2\pi}{|b|} = \pi$

③ ص = ٥ ما ٣ θ

الحل

٥ = ١ ، ٣ = ب

القيمة العظمى = ٥

= -١ = -٥ = القيمة الصغرى

القيمة الصغرى = $[5, -1]$ = $[1, -1]$

الدورة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

١ أكمل العبارات الآتية:

- ① مدى الدالة $y = \sin(\theta)$ هو θ
 ② مدى الدالة $y = \cos(\theta)$ هو θ
 ③ مدى الدالة $y = \tan(\theta)$ هو θ
 ④ القيمة الصغرى للدالة $y = \sin(\theta)$ هي θ
 ⑤ دورة الدالة $y = \sin(\theta)$ هي θ
 ⑥ القيمة العظمى للدالة $y = \sin(\theta)$ هي θ

٢ أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة $y = \sin(\theta)$ وأكتب مدى في كل مما يأتي:

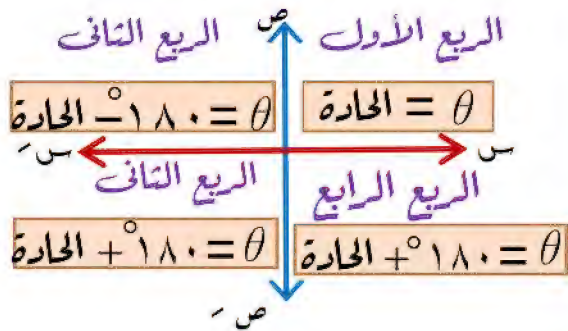
- ① $y = \sin(\theta)$
 ② $y = \sin(\theta)$
 ③ $y = \sin(\theta)$
 ④ $y = \sin(\theta)$
 ⑤ $y = \sin(\theta)$
 ⑥ $y = \sin(\theta)$

٣ أوجد مدى والدورة للدالة $y = \sin(\theta)$ في كل مما يأتي:

- ① $y = \sin(\theta)$
 ② $y = \sin(\theta)$
 ③ $y = \sin(\theta)$
 ④ $y = \sin(\theta)$
 ⑤ $y = \sin(\theta)$
 ⑥ $y = \sin(\theta)$

إيجاد قياس زاوية إذا علم إحدى نسبها المثلثية

فإذا كانت الزاوية تقع في

∴ هنا θ مرجبة

∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

في الأول	في الرابع
$\theta = \text{الحادة}$	$\theta = \text{في الرابع}$
$\therefore \theta = 60^\circ$	$\theta = 360^\circ - 36^\circ = 324^\circ$
	$\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$$\textcircled{2} \theta = \text{جا}^{-1}(-0,6874) = (-0,6874, 0)$$

الحل

الزاوية الحادة التي جيبها $0,6874$ هي $43^\circ 25' 29''$

$$\theta = \text{جا}^{-1}(-0,6874) = (-0,6874, 0) > \text{صفر}$$

 θ تقع

في الربع الثالث

$$\theta = 180^\circ + 43^\circ 25' 29'' = 223^\circ 25' 29''$$

إذا كانت: $\theta = P$ فيمكن كتابتها

بصورة أخرى مكافئة هي

$$\theta = \text{جا}^{-1}P$$

فمثلا :

إذا كان: $\theta = \frac{1}{4}$

فيمكن كتابتها على الصورة

$$\theta = \text{جا}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

ويقصده بذلك إيجاد الزاوية التي جيبها $\frac{1}{4}$

مثال ١

أوجد " θ " حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق أن :

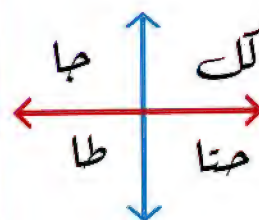
$$\textcircled{1} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

الحل

نوجد زاوية حادة جيب تمامها $\frac{1}{4}$ ∴ الزاوية الحادة هي 60°

من إشارة النسبة المثلثية نحدد ربعين

تقع فيهم الزاوية



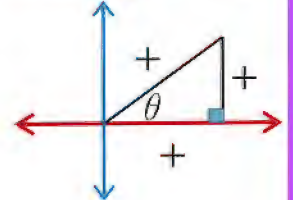
أو الرابع

$$316^\circ - 34^\circ = 31^\circ = 43^\circ - 25^\circ = 29^\circ - 36^\circ = \theta$$

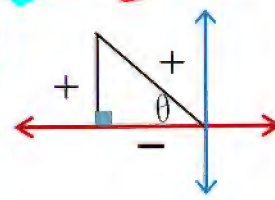
ملحوظة

إذا علم إحدى النسب للزاوية التلتية
نرسم الزاوية في الوضع القياسي
ثم نرسم التلت القائم الخاص بها في
هذا الربع موزعا عليه الإشارات
ثم نوجد الضلع المجهول من نظرية
فيثاغورث

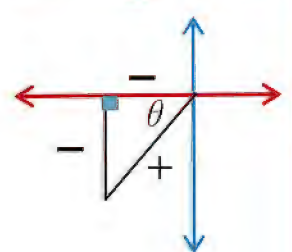
① إذا كانت θ تقع في الربع الأول



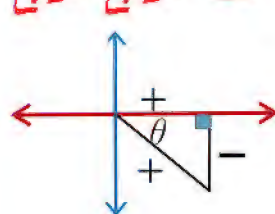
② إذا كانت θ تقع في الربع الثاني



③ إذا كانت θ تقع في الربع الثالث



④ إذا كانت θ تقع في الربع الرابع



مثال ١

إذا كانت : 12° ظل $\alpha = 5^\circ$

حيث α أكبر زاوية موجبة ،

25° جتا $\beta = 24^\circ$ حيث

$\beta \in [90^\circ, 180^\circ]$ فاوجد قيمة القدر

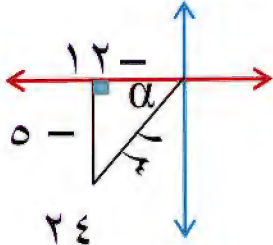
قنا $(\alpha + 180^\circ) +$ جتا $(\beta - 180^\circ)$

الحل

$$\therefore 12^\circ \text{ ظل } \alpha = 5^\circ \text{ صفر} \therefore \alpha = \frac{5}{12}$$

حيث α أكبر زاوية موجبة

$\therefore \alpha$ تقع في الربع الثالث

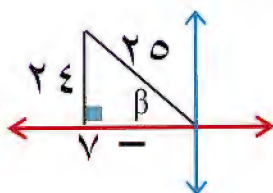


$$\therefore \alpha = \frac{5}{12} \text{ ظل } \frac{\text{القابل}}{\text{الجوار}} =$$

$$\therefore 25^\circ \text{ جتا } \beta = 24^\circ \therefore \beta = \frac{24}{25}$$

$\therefore \beta \in [90^\circ, 180^\circ]$ ،

حيث β تقع في الربع الثاني



$$\beta = \frac{24}{25} \text{ جتا } \frac{\text{القابل}}{\text{الوتر}} =$$

قنا $(\alpha + 180^\circ) = -\alpha$

$$= -\left(\frac{13}{5}\right) = -\frac{13}{5}$$

$$\text{جتا } \beta - = (\beta - ١٨٠^\circ)$$

$$\frac{٧}{٢٥} = \left(\frac{٧}{٢٥} \right) - =$$

$$\text{جتا } (\alpha + ١٨٠^\circ) + \text{جتا } (\beta - ١٨٠^\circ)$$

$$\frac{٧٢}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥} + \frac{١٣}{٥} =$$

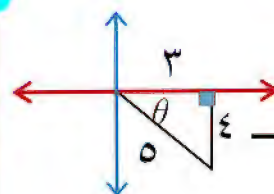
مثال ٢

إذا كانت : جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث

$٣٦٠^\circ > \theta > ٢٧٠^\circ$ فأوجد قيمة المقدار

$$\text{جا } (\theta - ١٨٠^\circ) + \text{طا } (\theta - ٩٠^\circ) - \text{طا } (\theta - ٢٧٠^\circ)$$

الحل



θ تقع في الربع الرابع

المقدار =

$$\text{جا } (\theta - ١٨٠^\circ) + \text{طا } (\theta - ٩٠^\circ) - \text{طا } (\theta - ٢٧٠^\circ)$$

$$= \text{جا } \theta + \text{طا } \theta - \text{طا } \theta$$

$$= \text{جا } \theta = \frac{٤}{٥}$$

تمارين

١ أوجد "θ" حيث $0 < \theta < 360^\circ$ و التي تحقق أن :

$$\textcircled{1} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \textcircled{2} \theta = \text{جا}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\textcircled{3} \theta = \text{قتا}^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \textcircled{4} \theta = \text{ظنا}^{-1}(1)$$

$$\textcircled{5} \theta = \text{فا}^{-1}(2) \quad \textcircled{6} \theta = \text{ظا}^{-1}(-\sqrt{3})$$

٢ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث $0 < \theta < 360^\circ$

$$\textcircled{1} \theta = 0,86603 \quad \textcircled{2} \text{جتا} \theta = -0,4752$$

$$\textcircled{3} \theta = 1,5417 \quad \textcircled{4} \text{قتا} \theta = -1,2576$$

$$\textcircled{5} \text{قتا} \theta = -1,8715 \quad \textcircled{6} \theta = 2,0515$$

$$\textcircled{7} \theta = 1,0899 \quad \textcircled{8} \text{جتا} \theta = -0,7349$$

٣ إذا كانت $12^\circ \text{ ظا} \theta = 5$ حيث θ زاوية حادة فأوجد قيمة كل من :

$$\textcircled{1} \text{جتا}^2 \theta - \text{جا}^2 \theta \quad \textcircled{2} \text{جتا} 120^\circ \text{ جا} (180^\circ - \theta) + \text{جا} 510^\circ \text{ جتا} \theta$$

٤ إذا كانت : $3^\circ \text{ ظا} \theta = 4$ حيث $\theta \in]0, 180^\circ[$

فأوجد قيمة القدار : $5 \text{ جتا} \theta + \text{ظا} (180^\circ - \theta) + \text{جتا} 120^\circ - \text{ظا} 315^\circ$

٥ إذا كانت $\text{جا} \theta = \frac{12}{13}$ حيث θ أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة القدار : $\text{قتا} (180^\circ - \theta) \text{ طا} \theta - \text{جتا} (180^\circ + \theta)$

٦ إذا كانت $4^\circ \text{ ظا} \theta = 3$ حيث $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$, 13 \text{ جا} \theta - 12 = 0 \text{ حيث } \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$$

$$\text{ظا} (90^\circ - \theta) \text{ جا} (-\theta) + \text{جا} 30^\circ$$

فأوجد قيمة القدار : $2 \text{ جا} 60^\circ \text{ ظا} 60^\circ - 45^\circ$

کراست

الفاروق

للملاحظات

أ/ عشرى فاروق

ملاحظات

التاريخ ٢٠ / /

اليوم

الموضوع

ملاحظات

التاريخ / / ٢٠

اليوم

الموضوع

ملاحظات

التاريخ / / ٢٠

اليوم

الموضوع

ملاحظات

التاريخ / / ٢٠

اليوم

الموضوع

